Предисловие

Предлагаемое пособие представляет собой подробное поурочное планирование по алгебре для 8 класса общеобразовательных учреждений. Пособие ориентировано на работу с базовым учебником: *Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. и др.* Алгебра. 8 класс. М.: Просвещение.

Каждый урок разбивается на ряд этапов.

I. Сообщение темы и цели урока (≈ 1–2 мин). Учащимся кратко сообщают тему проводимого урока и цели, которые должны быть достигнуты: ознакомиться с новыми понятиями, сведениями, изучить способы решения типовых задач, отработать определенные навыки и т. д.

II. Повторение и закрепление пройденного материала (≈ 15–18 мин) включает в себя *ответы по домашнему заданию* (5 мин) по теоретическим вопросам и разбор нерешенных задач. Это может быть сделано либо учителем, либо кем-то из школьников (желательно добровольно). Эта часть урока включает в себя и *контроль знаний* (≈ 10–12 мин). Поурочные контрольные материалы представлены в виде тестов, письменных опросов и самостоятельных работ.

Тесты используются при контроле сравнительного простого материала, не требующего серьезных теоретических знаний или сложных способов решения. *В письменных опросах* предусмотрены теоретические вопросы, связанные с основными понятиями, сведениями и приемами решения задач, а также решение задач.

В тексты *самостоятельных работ* включены более сложные задачи, требующие сравнительно серьезных усилий.

III. Работа по теме урока (≈ 10–15 мин). С помощью примеров и наводящих вопросов рассматривается новая тема. При этом желательно максимально активизировать учащихся. Разумеется, изучение нового материала должно сопровождаться *решением задач по теме* (у доски, самостоятельно на месте и т. д.).

Помимо задач, приведенных в базовых учебниках, почти для каждого урока приводятся *творческие задания*, которые требуют более высокой техники вычислений, отработанных навыков, логического мышления. В зависимости от уровня подготовки такие задачи могут быть использованы при работе в классе, в домашних заданиях, на факультативных занятиях.

В конце урока подводятся его *итоги* (≈ 1–2 мин). Сообщается, какие цели урока достигнуты (что удалось сделать), проставляются оценки за ответы на уроке и за самостоятельную работу, записывается домашнее задание.

По прохождении темы предусмотрена контрольная работа, состоящая из заданий трех уровней сложности, которые определяются или учителем, или самим учащимся.

Также проводится (по возможности) и зачетная работа, в которую включено большее количество задач трех уровней сложности. Такая работа позволяет сравнить успехи учащихся в одинаковых условиях.

Представленный в пособии материал избыточен. Поэтому его можно использовать для дифференцированного обучения, факультативных занятий, проведения олимпиад и т. д. Пособие будет полезно в первую очередь начинающим учителям, которые могут использовать целиком изложенные уроки. Опытные учителя могут пользоваться предложенным материалом, сообразуясь со своим опытом и планом. Разумеется, поурочные разработки являются ориентировочными и рассчитаны в основном на классы с высокой математической подготовкой.

В целях экономии времени при проверке знаний учащихся рекомендуется дополнительно использовать пособие: Контрольно-измерительные материалы. Алгебра. 8 класс / Сост. В.В. Черноруцкий. М.: ВАКО, 2016.

Тематическое планирование учебного материала

№ урока	Тема урока
Глава I. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ (23 ч)	
§ 1. Рациональные дроби и их свойства (5 ч)	
1, 2	Рациональные выражения
3–5	Основное свойство дроби. Сокращение дробей
§ 2. Сумма и разность дробей (7 ч)	
6–8	Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями
9–11	Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями

№ урока	Тема урока
12	Контрольная работа № 1 по теме «Сумма и разность дробей»
§ 3. Произведение и частное дробей (11 ч)	
13–15	Умножение дробей. Возведение дроби в степень
16, 17	Деление дробей
18–20	Преобразование рациональных выражений
21, 22	Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график
23	Контрольная работа № 2 по теме «Рациональные дроби»
	Факультативный урок. Метод неопределенных коэффициентов
	Факультативный урок. Задачи на рациональные дроби
	Факультативный урок. Деление многочленов
	Факультативный урок. Дробно-линейная функция и ее график
	Факультативный урок. Графики функций, содержащих модуль
	Факультативный урок. Зачетная работа по теме «Рациональные дроби и их свойства»
Глава II. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ (19 ч)	
§ 4. Действительные числа (2 ч)	
24	Рациональные числа
25	Иррациональные числа
§ 5. Арифметический квадратный корень (5 ч)	
26	Квадратные корни. Арифметический квадратный корень
27	Уравнение $x^2 = a$
28	Нахождение приближенных значений квадратного корня
29, 30	Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график
§ 6. Свойства арифметического квадратного корня (4 ч)	
31, 32	Квадратный корень из произведения и дроби
33	Квадратный корень из степени
34	Контрольная работа № 3 по теме «Свойства квадратного арифметического корня»
§ 7. Применение свойств арифметического квадратного корня (8 ч)	
35–37	Вынесение множителя из-под знака корня. Внесение множителя под знак корня
38–41	Преобразование выражений, содержащих квадратные корни
42	Контрольная работа № 4 по теме «Применение свойств квадратного корня»

№ урока	Тема урока
	Факультативный урок. Натуральные числа. Делимость натуральных чисел
	Факультативный урок. Решение уравнений в целых числах
	Факультативный урок. Зачетная работа по теме «Квадратные корни»
Глава III. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ (22 ч)	
§ 8. Квадратное уравнение и его корни (11 ч)	
43, 44	Определение квадратного уравнения. Неполные квадратные уравнения
45	Решение квадратных уравнений выделением квадрата двучлена
46, 47	Формула корней квадратного уравнения
48–50	Решение задач с помощью квадратных уравнений
51, 52	Теорема Виета
53	Контрольная работа № 5 по теме «Квадратные уравнения»
§ 9. Дробные рациональные уравнения (11 ч)	
54–57	Решение дробных рациональных уравнений
58–60	Решение задач с помощью рациональных уравнений
61, 62	Графический способ решения уравнений. Уравнения с параметром
63	Контрольная работа № 6 по теме «Квадратные уравнения. Дробные рациональные уравнения»
	Факультативный урок. Решение некоторых уравнений высоких степеней и дробно-рациональных уравнений
	Факультативный урок. Зачетная работа по теме «Квадратные уравнения»
Глава IV. НЕРАВЕНСТВА (19 ч)	
§ 10. Числовые неравенства и их свойства (8 ч)	
64, 65	Сравнение чисел. Числовые неравенства
66, 67	Свойства числовых неравенств
68–70	Сложение и умножение числовых неравенств
71	Погрешность и точность приближения
72	Контрольная работа № 7 по теме «Числовые неравенства и их свойства»
§ 11. Неравенства с одной переменной и их системы (11 ч)	
73	Пересечение и объединение множеств
74	Числовые промежутки

№ урока	Тема урока
75–78	Решение неравенств с одной переменной
79–82	Решение систем неравенств с одной переменной
83	Контрольная работа № 8 по теме «Неравенства»
	Факультативный урок. Решение более сложных неравенств
	Факультативный урок. Решение систем неравенств
	Факультативный урок. Зачетная работа по теме «Неравенства»
Глава V. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ (11 ч)	
§ 12. Степень с целым показателем и ее свойства (7 ч)	
84, 85	Определение степени с целым отрицательным показателем
86, 87	Свойства степени с целым показателем
88, 89	Стандартный вид числа
90	Контрольная работа № 9 по теме «Степень с целым показателем»
§ 13. Элементы статистики (4 ч)	
91, 92	Сбор и группировка статистических данных
93, 94	Наглядное представление статистической информации
	Факультативный урок. Зачетная работа по теме «Степень с целым показателем»
Повторение (6 ч)	
95, 96	Повторение темы «Рациональные дроби»
97	Повторение темы «Квадратные корни»
98	Повторение темы «Квадратные уравнения»
99	Повторение темы «Неравенства»
100	Повторение темы «Степень с целым показателем. Элементы статистики»
101	Итоговая контрольная работа
102	Подведение итогов обучения

Глава I
РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

§ 1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ И ИХ СВОЙСТВА

Уроки 1, 2. Рациональные выражения

Цель: рассмотреть рациональные выражения и допустимые значения переменных в них.

Планируемые результаты: освоить виды алгебраических выражений, понятие допустимых значений переменных.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

План уроков

1. Виды алгебраических выражений.
2. Допустимые значения переменных в выражении.

1. Виды алгебраических выражений

Напомним основные понятия, введенные в 7 классе.

Алгебраическим выражением называется выражение, составленное из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и с помощью скобок.

Пример 1

Алгебраические выражения:

а) $\frac{1}{7}a^3b-2ab^2(a+b)$; г) $\frac{(2a-3b)^2}{3a-4b^2}$;

б) $2a+(3a-b)^2$; д) $\frac{3a^3-2ab+b^2}{2a(3a-b)}$;

в) $3a^2b+\frac{2a}{a-4b}$; е) $\frac{2a^2-3ab}{(a-3b)^2-(7a-4b)^2}$.

Алгебраическое выражение, которое не содержит деления на выражения с переменными, называется *целым*. В примере 1 целыми являются выражения *а* и *б*. Выражение, которое содержит деление на переменные, называется *дробным*. В примере 1 дробными являются выражения *в–е*. Целые и дробные выражения вместе называются *рациональными*. После преобразований целые выражения можно подразделить на *одночлены* и *многочлены*.

Пример 2

а) Целое выражение $A = \frac{3}{7}x^3y^4 - \frac{1}{2}xy^2 \cdot 5x^2y^2 + 4(xy)^3 y$ после преобразований: $A = \frac{3}{7}x^3y^4 - \frac{5}{2}x^3y^4 + 4x^3y^3 \cdot y = \frac{3}{7}x^3y^4 - \frac{5}{2}x^3y^4 + {}$ $+ 4x^3y^4 = \frac{27}{14}x^3y^4$ – становится одночленом.

б) Целое выражение $B = 3ab^2 + 4(2a - b^2)^2$ после преобразований: $B = 3ab^2 + 4(4a^2 - 4ab^2 + b^4) = 3ab^2 + 16a^2 - 16ab^2 + 4b^4 =$ $= 4b^4 - 13ab^2 + 16a^2$ – становится многочленом (четвертой степени).

Рациональное выражение, представляющее собой дробь, числитель и знаменатель которой многочлены, называется *рациональной дробью*. При этом одночлены считаются частным видом многочленов.

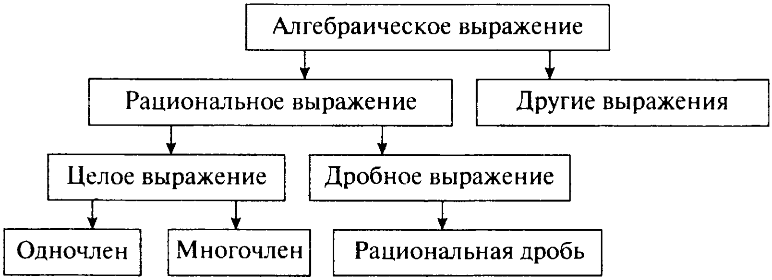
Пример 3

а) Рациональные дроби: $\frac{3}{a}$; $\frac{7a}{5b^2c^3}$; $\frac{2a-3}{8}$; $\frac{5x^2+y^3}{x-2y}$; $\frac{3}{4x^2-9y^2}$; $\frac{7x+6y^2}{5x^2-y}$ и т. д.

б) Рациональные выражения $2a + \frac{a}{3}$; $7x + \frac{a-b}{3a+7}$; $\frac{(3a-2b)^2}{4a-3b}$; $\frac{2a^3b}{(x-2y)^3}$ не являются рациональными дробями (по определению), так как в первых двух случаях выражения не являются дробью, в третьем случае числитель дроби будет многочленом только после преобразований, в четвертом случае знаменатель дроби станет многочленом также только после преобразований.

Разумеется, принципиальных отличий рационального выражения от рациональной дроби не существует. После соответствующих преобразований рациональное выражение можно привести к рациональной дроби. В примере 3, *б* в первом случае достаточно привести подобные члены, во втором случае привести выражения к общему знаменателю, в третьем случае числитель возвести в квадрат, в четвертом случае знаменатель возвести в куб.

Помимо рассмотренных алгебраических выражений, в математике используются и другие выражения: иррациональные, логарифмические и др. Для наглядности виды алгебраических выражений представлены на схеме.



2. Допустимые значения переменных в выражении

Значения переменных, при которых алгебраическое выражение имеет смысл, называются *допустимыми значениями* переменных. Целое выражение имеет смысл при любых значениях, входящих в него переменных, так как все действия с переменными выполнимы.

Пример 4

Найдем значение целого выражения $A = 3ab^2 + (2a - b)^2$ при $a = \frac{1}{2}$ и $b = 2$. Подставим значения переменных a и b в выражение A и получим $A = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \left(2 \cdot \frac{1}{2} - 2\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + (1 - 2)^2 = 6 + (-1)^2 = 6 + 1 = 7$.

Дробное выражение не имеет смысла при тех значениях переменных, при которых знаменатели величин равны нулю.

Пример 5

а) Дробное выражение $A = 3ab^2 + \frac{7a - 3b}{a - 2}$ не имеет смысла при $a - 2 = 0$ (так как делить на нуль нельзя), т. е. при $a = 2$. При всех остальных значениях a это выражение имеет смысл. Поэтому допустимыми значениями переменных являются все значения a, кроме числа 2, и все значения b.

б) Дробное выражение $A = 2x^2 + 3y^4 + \frac{3x + 2y}{x - 2y}$ не имеет смысла при $x - 2y = 0$ (так как делить на нуль нельзя), так как при $x = 2y$.

При всех остальных значениях переменных x и y это выражение имеет смысл. Поэтому допустимыми значениями переменных являются все значения x и y, кроме тех, для которых $x = 2y$.

в) Рациональная дробь $A = \dfrac{2a + 3b^2}{(a-2)(b+3)}$ не имеет смысла, если знаменатель $(a - 2)(b + 3) = 0$. Такое равенство выполняется при $a = 2$ и $b = -3$. Поэтому допустимыми значениями переменных являются все значения a, кроме числа 2, и все значения b, кроме числа -3.

г) Рациональная дробь $A = \dfrac{5a^2}{9a^2 - 16}$ не имеет смысла, если знаменатель дроби $9a^2 - 16 = 0$. Решим это уравнение. Используя формулу разности квадратов, разложим его левую часть на множители: $9a^2 - 16 = 0$, или $(3a)^2 - 4^2 = 0$, или $(3a - 4)(3a + 4) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $3a - 4 = 0$ (его корень $a = \frac{4}{3}$) и $3a + 4 = 0$ (корень $a = -\frac{4}{3}$). Поэтому допустимые значения переменной a – все числа, кроме $-\frac{4}{3}$ и $\frac{4}{3}$.

д) Рациональная дробь $A = \dfrac{3a^2 b}{2a^2 + 3b^2 + 1}$ имеет смысл при всех значениях a и b, так как знаменатель дроби $2a^2 + 3b^2 + 1$ не равен нулю при всех значениях переменных.

III. Задания на уроках

№ 2; 3; 4 (а); 5 (б); 7 (а); 9 (б); 10 (б); 12; 14; 15 (а); 17 (а); 18 (а, б); 19 (а).

IV. Контрольные вопросы

1. Какое выражение называется алгебраическим? Приведите примеры.
2. Дайте определение целого и дробного выражений. Приведите примеры.
3. Вспомните понятия одночлена и многочлена (курс 7 класса). Приведите примеры.
4. Какое выражение называется рациональной дробью? Приведите примеры.
5. Какие значения переменных называются допустимыми?
6. При каких значениях переменных целое выражение имеет смысл?
7. При каком условии дробное выражение не имеет смысла? Приведите примеры.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 1; 4 (б); 5 (а); 7 (б); 8 (а); 9 (а); 10 (а); 11; 13; 15 (г); 16 (б, в); 17 (б); 19 (б).

Уроки 3–5. Основное свойство дроби. Сокращение дробей

Цели: рассмотреть основное свойство дроби и отработать навыки сокращения дробей и приведения дробей к заданному знаменателю.

Планируемые результаты: вспомнить основное свойство дроби, отработать навыки сокращения дробей.

Тип уроков: уроки изучения нового материала, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос + тест).

Вариант 1

1. Какое выражение называется рациональной дробью? Приведите примеры.

2. Найдите значение дроби $\frac{3x-2}{x+3}$ при $x = 0{,}6$.

а) $\frac{1}{36}$; б) $-\frac{1}{9}$; в) $-\frac{1}{18}$.

3. Укажите допустимые значения переменной в выражении $\frac{3x-5}{x+3}+\frac{x-1}{x^2-4}$.

а) $x \neq \frac{5}{3}$, $x \neq 1$;

б) $x \neq -3$, $x \neq \pm 2$;

в) $x \neq \frac{5}{3}$, $x \neq 1$, $x \neq -3$, $x \neq \pm 2$.

Вариант 2

1. Какие значения переменных называются допустимыми? Приведите примеры.

2. Найдите значение дроби $\frac{5x-1}{x+1}$ при $x = 0{,}6$.

а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{5}{4}$; в) $\frac{4}{5}$.

3. Укажите допустимые значения переменной в выражении $\frac{2x-3}{x+2} + \frac{x-3}{x^2-1}$.

а) $x \neq \frac{3}{2}$, $x \neq 3$;

б) $x \neq \frac{3}{2}$, $x \neq 3$, $x \neq -2$, $x \neq \pm 1$;

в) $x \neq -2$, $x \neq \pm 1$.

III. Работа по теме уроков

План уроков

1. Основное свойство дроби.
2. Тождество.
3. Приведение дроби к заданному знаменателю.
4. Сокращение дробей.
5. Способы разложения многочленов на множители.

1. Основное свойство дроби

Свойства рациональных дробей и операции с ними очень похожи на свойства числовых дробей и действия с ними. Напомним известное вам *основное свойство обыкновенной дроби*: если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же натуральное число, то получится равная дробь, т. е. равенство $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ верно при любых натуральных значениях a, b и c.

Это равенство справедливо не только при натуральных, но и при любых других значениях переменных a, b и c, при которых знаменатель не равен нулю, т. е. при $b \neq 0$ и $c \neq 0$. Докажем это утверждение.

Пусть дробь $\frac{a}{b} = m$. Тогда по определению частного имеем $a = bm$. Умножим обе части этого равенства на число c и получим $ac = (bm) \cdot c$. На основании переместительного и сочетательного свойств умножения запишем: $ac = (bc) \cdot m$. Так как $b \neq 0$ и $c \neq 0$ (т. е. $bc \neq 0$), то выразим из этого равенства величину $m = \frac{ac}{bc}$. Кроме этого равенства, есть равенство $m = \frac{a}{b}$. Приравняем правые части этих выражений и получим требуемое равенство $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Заметим, что основное свойство дроби выполняется и в том случае, когда c – любое ненулевое выражение.

2. Тождество

Уточним некоторые понятия, изученные в 7 классе. Ранее тождеством называлось равенство, которое выполнялось при любых значениях переменных. Тождествами, например, назывались все формулы сокращенного умножения и т. д. Равенство $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ верно при всех значениях переменных, при которых его левая и правая части имеют смысл, т. е. при всех допустимых значениях переменных. Такие равенства также называют тождествами. Очевидно, что ранее данное понятие тождества является частным случаем более общего определения.

В общем случае *тождеством* называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных. Два выражения, принимающие равные значения при всех допустимых для них значениях переменных, называют *тождественно равными*. Замену одного такого выражения другим называют *тождественным преобразованием* выражения.

Было доказано, что равенство $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ верно при всех допустимых значениях переменных. Поэтому по определению это равенство является тождеством. Такое тождество называют *основным свойством дроби*.

3. Приведение дроби к заданному знаменателю

Основное свойство дроби используют для ее приведения к заданному знаменателю.

Пример 1

Приведем дробь $\frac{2a^2}{3b^3}$ к знаменателю $27b^5$ (т. е. запишем данную дробь в виде дроби со знаменателем $27b^5$).

В заданном (новом) знаменателе $27b^5$ выделим в качестве множителя старый знаменатель $3b^3$, т. е. запишем равенство $27b^5 = 3b^3 \cdot 9b^2$. Поэтому, чтобы получить дробь с новым знаменателем $27b^5$, используя основное свойство дроби, умножим числитель и знаменатель данной дроби $\frac{2a^2}{3b^3}$ на множитель $9b^2$.

Тогда получим $\frac{2a^2}{3b^3} = \frac{2a^2 \cdot 9b^2}{3b^3 \cdot 9b^2} = \frac{18a^2b^2}{27b^5}$. При этом множитель $9b^2$ называют *дополнительным множителем* к числителю и знаменателю данной дроби $\frac{2a^2}{3b^3}$.

Пример 2

Приведем дробь $\dfrac{3x}{2x-3y}$ к знаменателю $3y - 2x$. Видно, что новый знаменатель $3y - 2x$ и старый знаменатель $2x - 3y$ отличаются только знаком, т. е. $3y - 2x = -(2x - 3y) = -1 \cdot (2x - 3y)$. Поэтому умножим числитель и знаменатель данной дроби $\dfrac{3x}{2x-3y}$ на дополнительный множитель (-1). Используя основное свойство дроби, получим

$$\frac{3x}{2x-3y} = \frac{3x\cdot(-1)}{(2x-3y)\cdot(-1)} = \frac{-3x}{3y-2x} = -\frac{3x}{3y-2x}.$$

Пример 3

Приведем дробь $\dfrac{5}{3a-4b}$ к знаменателю $16b^2 - 9a^2$.

Учтем, что новый знаменатель $16b^2 - 9a^2 = -(9a^2 - 16b^2) = -(3a + 4b)(3a - 4b)$ по формуле разности квадратов. Поэтому умножим числитель и знаменатель данной дроби $\dfrac{5}{3a-4b}$ на дополнительный множитель $-(3a + 4b)$. Используя основное свойство дроби, получим

$$\frac{5}{3a-4b} = \frac{5\cdot\left(-(3a+4b)\right)}{(3a-4b)\left(-(3a+4b)\right)} = \frac{-5(3a+4b)}{-(3a-4b)(3a+4b)} =$$

$$= \frac{-15a-20b}{-\left(9a^2-16b^2\right)} = \frac{-15a-20b}{16b^2-9a^2} = -\frac{15a+20b}{16b^2-9a^2}.$$

Заметим, что приведение дробей к заданному знаменателю используется при сложении и вычитании дробей.

4. Сокращение дробей

Поменяем в равенстве $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$ левую и правую части местами и получим тождество $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$. Это равенство позволяет заменить дробь вида $\dfrac{ac}{bc}$ более простой тождественно равной дробью $\dfrac{a}{b}$, т. е. сократить дробь $\dfrac{ac}{bc}$ на общий множитель c числителя и знаменателя.

Пример 4

Сократим дробь $\dfrac{35a^3b^2}{7a^2b^3}$.

Видно, что числитель $35a^3b^2$ и знаменатель $7a^2b^3$ дроби имеют общий множитель $7a^2b^2$. Поэтому представим числитель и знаменатель дроби в виде произведений, имеющих один и тот же множитель $7a^2b^2$, и сократим дробь на этот множитель. Получаем $\frac{35a^3b^2}{7a^2b^3} = \frac{7a^2b^2 \cdot 5a}{7a^2b^2 \cdot b} = \frac{5a}{b}$. После сокращения дроби $\frac{35a^3b^2}{7a^2b^3}$ получили более простую дробь $\frac{5a}{b}$.

Заметим, что при сокращении дроби надо выделять наибольший общий множитель числителя и знаменателя. В рассмотренном примере множитель $7a^2b^2$ были наибольшим. Для выражений $35a^3b^2$ и $7a^2b^3$ число 7 является наибольшим общим делителем чисел 35 и 7, a^2 – множитель a в наименьшей степени, с которой он входит в числитель и знаменатель, b^2 – множитель b также в наименьшей степени, с которой он входит в числитель и знаменатель. Поэтому множитель $7a^2b^2$ – наибольший общий множитель числителя и знаменателя.

Если общий множитель числителя и знаменателя будет не наибольшим, то после сокращения на него дроби дробь может быть сокращена еще. Например, если вместо наибольшего общего множителя рассмотреть множитель $7a^2b$, то получаем $\frac{35a^3b^2}{7a^2b^3} = \frac{7a^2b \cdot 5ab}{7a^2b \cdot b^2} = \frac{5ab}{b^2}$. Очевидно, что полученную дробь $\frac{5ab}{b^2}$ можно еще раз сократить.

5. Способы разложения многочленов на множители

Пример 5

Сократим дробь $\frac{8a^3 - b^3}{4a^2 - b^2}$.

Для сокращения дроби разложим ее числитель и знаменатель на множители, используя формулы сокращенного умножения. Для числителя по формуле разности кубов получаем: $8a^3 - b^3 = (2a)^3 - b^3 = (2a - b) \cdot ((2a)^2 + 2a \cdot b + b^2) = (2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$.

Для знаменателя по формуле разности квадратов имеем: $4a^2 - b^2 = (2a)^2 - b^2 = (2a - b)(2a + b)$. Видно, что числитель и знаменатель имеют общий множитель $2a - b$, на который сократим дробь: $\frac{8a^3 - b^3}{4a^2 - b^2} = \frac{(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)}{(2a - b)(2a + b)} = \frac{4a^2 + 2ab + b^2}{2a + b}$.

Разумеется, при сокращении дробей используют и другие способы разложения многочленов, стоящих в числителе и знаменателе дроби, на множители. В частности, широко используется способ группировки и вынесения общего множителя за скобки.

Пример 6

Сократим дробь $\dfrac{ab+ac}{ab-3b+ac-3c}$.

В числителе дроби вынесем общий множитель a за скобки и получим: $ab + ac = a(b + c)$. В знаменателе дроби сгруппируем члены и вынесем общий множитель за скобки. Имеем $ab - 3b + ac - 3c = (ab - 3b) + (ac - 3c) = b(a - 3) + c(a - 3) = (a - 3)(b + c)$. Видно, что числитель и знаменатель имеют общий множитель $b + c$, на который сократим данную дробь. Получаем

$$\frac{ab+ac}{ab-3b+ac-3c}=\frac{a(b+c)}{(a-3)(b+c)}=\frac{a}{a-3}.$$

Так как и далее мы будем использовать разложение числителя и знаменателя дроби на множители, вспомним основные *способы разложения* многочленов на множители:

1) вынесение общего множителя за скобки;

2) группировка членов многочлена;

3) использование формул сокращенного умножения.

Напомним также *формулы сокращенного умножения*:

1) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ (разность квадратов двух чисел равна произведению разности и суммы этих чисел);

2) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа);

3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа);

4) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ (разность кубов двух чисел равна произведению разности этих чисел на неполный квадрат их суммы).

Заметим, что неполным квадратом суммы чисел a и b называется выражение $a^2 + ab + b^2$ (по аналогии с квадратом (или полным квадратом) суммы чисел a и b: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$);

5) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел на неполный квадрат их разности).

Отметим, что неполным квадратом разности чисел a и b называется выражение $a^2 - ab + b^2$ (сравните с полным квадратом разности чисел a и b: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$);

6) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (куб суммы двух чисел равен кубу первого числа плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго плюс куб второго числа);

7) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (куб разности двух чисел равен кубу первого числа минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго минус куб второго числа).

IV. Задания на уроках

№ 23 (б, д); 25 (д); 27 (а); 28 (б, г); 29 (а, г); 30 (в); 31 (б); 32 (а); 33 (б); 35 (б); 42 (б); 44 (в); 45; 47; 49 (а, в).

V. Контрольные вопросы

1. Докажите основное свойство дроби.
2. Какое равенство называется тождеством? Приведите примеры.
3. Основные способы разложения многочленов на множители.
4. Формулы сокращенного умножения (рекомендуется опросить нескольких учащихся).

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 23 (а, г, е); 24 (в, е); 25 (а); 27 (б); 28 (а, в); 29 (д, е); 30 (д); 31 (а); 32 (б); 33 (а, г); 35 (а, г); 38 (а, д); 39; 41 (а); 46; 48; 49 (б, г).

§ 2. СУММА И РАЗНОСТЬ ДРОБЕЙ

Уроки 6–8. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями

Цель: изучить сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями.

Планируемые результаты: получить навыки сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Тип уроков: уроки изучения нового материала, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Сократите дробь: а) $\frac{3a^3b^2}{15ab^4}$; б) $\frac{a^2+2ab}{a^2-4b^2}$; в) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$.

2. Постройте график функции $y=\frac{4x^2-1}{2x+1}$.

Вариант 2

1. Сократите дробь: а) $\frac{6a^4b}{18a^2b^3}$; б) $\frac{a^3-3a^2b}{a^2-9b^2}$; в) $\frac{x^2+4x+4}{2x^2-8}$.

2. Постройте график функции $y=\frac{1-4x^2}{2x-1}$.

III. Работа по теме уроков

План уроков

1. Сложение дробей.
2. Вычитание дробей.

1. Сложение дробей

При сложении (вычитании) обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями складываются (вычитаются) их числители, а знаменатель остается тем же.

Пример 1

Сложим и вычтем дроби $\frac{5}{9}$ и $\frac{2}{9}$. По приведенному правилу получаем: $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5+2}{9}=\frac{7}{9}$ и $\frac{5}{9}-\frac{2}{9}=\frac{5-2}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

По тому же правилу складывают и любые дроби с одинаковыми знаменателями, т. е. $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$. Докажем, что это равенство верно при любых допустимых значениях переменных, т. е. при $c \neq 0$.

Пусть $\frac{a}{c}=m$ и $\frac{b}{c}=n$. Почленно сложим эти равенства и получим $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=m+n$ или $m+n=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$. По определению частного из равенства $\frac{a}{c}=m$ получаем $a=cm$, из равенства $\frac{b}{c}=n$ имеем $b=cn$. Почленно сложив равенства $a=cm$ и $b=cn$, получим $a+b=cm+cn=c(m+n)$. Так как $c \neq 0$, то выразим из этого равенства $m+n=\frac{a+b}{c}$. Итак, имеем два равенства: $m+n=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ и $m+n=\frac{a+b}{c}$. Приравняв правые части этих равенств, получим

$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$. Таким образом, получено тождество, из которого следует правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями. Итак, чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители, а знаменатель оставить тем же. Это правило справедливо при сложении любого числа дробей.

Пример 2

Сложим дроби $\frac{3a-3b}{16a^2b}$ и $\frac{5a+3b}{16a^2b}$.

В соответствии с приведенным правилом получаем

$$\frac{3a-3b}{16a^2b}+\frac{5a+3b}{16a^2b}=\frac{3a-3b+5a+3b}{16a^2b}=\frac{8a}{16a^2b}=\frac{8a}{8a\cdot 2ab}=\frac{1}{2ab}.$$

Пример 3

Сложим дроби $\frac{a^2+a}{3(a+2)^3}$, $\frac{3a+2}{3(a+2)^3}$ и $\frac{2}{3(a+2)^3}$.

Еще раз используем правило сложения дробей и получим

$$\frac{a^2+a}{3(a+2)^3}+\frac{3a+2}{3(a+2)^3}+\frac{2}{3(a+2)^3}=\frac{a^2+a+3a+2+2}{3(a+2)^3}=$$

$$=\frac{a^2+4a+4}{3(a+2)^3}=\frac{(a+2)^2}{3(a+2)^3}=\frac{1}{3(a+2)}.$$

2. Вычитание дробей

Вычитание дробей с одинаковыми знаменателями выполняется аналогично сложению. Докажем, что при любых значениях a, b и $c \neq 0$ выполняется тождество $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$. Учтем, что операция вычитания обратна по отношению к сложению. Поэтому достаточно доказать, что сумма дробей $\frac{a-b}{c}$ и $\frac{b}{c}$ равна дроби $\frac{a}{c}$. Проверим это: $\frac{a-b}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a-b+b}{c}=\frac{a}{c}$. Из доказанного тождества $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$ следует правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, надо из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тем же.

Пример 4

Вычтем из дроби $\frac{3a^2}{a+2b}$ дробь $\frac{12b^2}{a+2b}$.

Применим приведенное правило вычитания дробей и получим

$$\frac{3a^2}{a+2b}-\frac{12b^2}{a+2b}=\frac{3a^2-12b^2}{a+2b}=\frac{3\left(a^2-4b^2\right)}{a+2b}=\frac{3(a-2b)(a+2b)}{a+2b}=$$
$$=3(a-2b).$$

Иногда при выполнении сложения или вычитания дробей приходится изменять знак знаменателя одной из дробей и заменять операцию сложения операцией вычитания (или наоборот).

Пример 5

Сложим дроби $\frac{2a^2}{a-2b}$ и $\frac{8b^2}{2b-a}$.

Учтем, что знаменатели дробей являются противоположными выражениями. Поэтому изменим знаки в знаменателе второй дроби и перед этой дробью (это соответствует умножению числителя и знаменателя дроби на число -1 в соответствии с основным свойством дроби). Получим:

$$\frac{8b^2}{2b-a}=\frac{8b^2\cdot(-1)}{(2b-a)\cdot(-1)}=\frac{-8b^2}{-2b+a}=-\frac{8b^2}{a-2b}.$$

После этого сложение данных дробей сводится к вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями. Тогда имеем

$$\frac{2a^2}{a-2b}+\frac{8b^2}{2b-a}=\frac{2a^2}{a-2b}-\frac{8b^2}{a-2b}=\frac{2a^2-8b^2}{a-2b}=\frac{2\left(a^2-4b^2\right)}{a-2b}=$$
$$=\frac{2(a-2b)(a+2b)}{a-2b}=2(a+2b).$$

Разумеется, правила сложения и вычитания дробей в ряде случаев удобно использовать совместно.

Пример 6

Упростим выражение $\frac{a^2+3}{a^2-3a}-\frac{3a-2}{a^2-3a}+\frac{4-3a}{a^2-3a}$.

Применим совместно правила сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями и получим:

$$\frac{a^2+3}{a^2-3a}-\frac{3a-2}{a^2-3a}+\frac{4-3a}{a^2-3a}=\frac{a^2+3-(3a-2)+4-3a}{a^2-3a}=$$
$$\frac{a^2+3-3a+2+4-3a}{a^2-3a}=\frac{a^2-6a+9}{a^2-3a}=\frac{(a-3)^2}{a(a-3)}=\frac{a-3}{a}.$$

Данное выражение имеет смысл при тех значениях a, при которых знаменатель $a(a-3)\neq 0$, т. е. при $a\neq 0$ и $a\neq 3$.

IV. Задания на уроках

№ 54 (б); 55 (а, д); 56 (а); 58 (б); 59 (а); 61 (а); 63 (а); 64; 66 (а, в); 67 (б, г); 68.

V. Контрольные вопросы

1. Как складывают дроби с одинаковыми знаменателями?
2. Докажите тождество $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$.
3. Как вычитают дроби с одинаковыми знаменателями?
4. Докажите тождество $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 54 (д); 55 (г); 56 (б); 58 (а); 59 (б); 61 (б); 63 (б); 65; 66 (б, г); 67 (а, в); 69.

Уроки 9–11. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями

Цель: изучить сложение и вычитание дробей с разными знаменателями.

Планируемые результаты: отработать навыки сложения и вычитания дробей с разными знаменателями.

Тип уроков: уроки проблемного изложения, урок общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Как складывают дроби с одинаковыми знаменателями?
2. Выполните действия: а) $\frac{2a+5}{a^2-9}-\frac{a+2}{a^2-9}$; б) $\frac{c^2+8c}{4-c^2}+\frac{4-4c}{4-c^2}$.
3. Выделите целую и дробную части в выражении $\frac{x^2+2x+3}{x+2}$.

Вариант 2

1. Как вычитают дроби с одинаковыми знаменателями?

2. Выполните действия: а) $\frac{4a+7}{a^2-4} - \frac{3a+5}{a^2-4}$; б) $\frac{c^2+17c}{16-c^2} + \frac{16-9c}{16-c^2}$.

3. Выделите целую и дробную части в выражении $\frac{x^2-3x+4}{x-3}$.

III. Работа по теме уроков

План уроков

1. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями.
2. Рациональный способ сложения и вычитания дробей.
3. Примеры сложения большого числа дробей.

1. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями

Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями надо свести к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями. Для этого исходные дроби приводят к *общему знаменателю.*

Пусть требуется сложить (вычесть) дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Общим знаменателем этих дробей будет произведение bd знаменателей дробей. Приведем данные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ к такому общему знаменателю. Для этого умножим числитель и знаменатель первой дроби $\frac{a}{b}$ на дополнительный множитель d и получим $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$. Числитель и знаменатель второй дроби $\frac{c}{d}$ умножим на дополнительный множитель b и получим $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$.

Теперь можно использовать правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями. Имеем $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$. Аналогично можно вычесть дроби с разными знаменателями: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$.

Пример 1

Сложим и вычтем дроби $\frac{3a}{4b}$ и $\frac{2b}{5a}$.

Общий знаменатель этих дробей – произведение их знаменателей $4b \cdot 5a = 20ab$. Тогда дополнительный множитель к числителю и знаменателю первой дроби $5a$, дополнительный множитель к числителю и знаменателю второй дроби $4b$. Поэтому получаем

$$\frac{3a}{4b}+\frac{2b}{5a}=\frac{3a\cdot 5a+2b\cdot 4b}{20ab}=\frac{15a^2+8b^2}{20ab};$$

$$\frac{3a}{4b}-\frac{2b}{5a}=\frac{3a\cdot 5a-2b\cdot 4b}{20ab}=\frac{15a^2-8b^2}{20ab}.$$

Пример 2

Сложим дроби $\frac{3}{4a^2b^3}$ и $\frac{5}{6ab^4}$.

Общий знаменатель этих дробей – произведение их знаменателей $4a^2b^3\cdot 6ab^4=24a^3b^7$. Тогда дополнительный множитель к первой дроби $6ab^2$, ко второй дроби – $4a^2b^3$. Поэтому получаем

$$\frac{3}{4a^2b^3}+\frac{5}{6ab^4}=\frac{3\cdot 6ab^4+5\cdot 4a^2b^3}{24a^3b^7}=\frac{18ab^4+20a^2b^3}{24a^3b^7}.$$

Теперь упростим полученную дробь. Для этого разложим числитель дроби на множители (вынеся общий множитель за скобки) и сократим дробь:

$$\frac{18ab^4+20a^2b^3}{24a^3b^7}=\frac{2ab^3(9b+10a)}{24a^3b^7}=\frac{2ab^3(9b+10a)}{2ab^3\cdot 12a^2b^4}=\frac{9b+10a}{12a^2b^4}.$$

2. Рациональный способ сложения и вычитания дробей

Заметим, что сложение и вычитание дробей с разными знаменателями можно упростить, если приводить дроби не просто к общему знаменателю, а к *наименьшему общему знаменателю.*

В рассмотренном примере наименьшим общим знаменателем будет одночлен $12a^2b^4$. Коэффициент этого одночлена равен наименьшему общему кратному коэффициентов 4 и 6 дробей. Каждая переменная a и b входит в наименьший общий знаменатель с наибольшим показателем, с которым она входит в знаменатели дробей (соответственно a^2 и b^4). Дополнительный множитель к первой дроби получим, если разделим наименьший общий знаменатель на знаменатель первой дроби $\frac{12a^2b^4}{4a^2b^3}=3b$. Аналогично дополнительный множитель ко второй дроби найдем, если разделим наименьший общий знаменатель на знаменатель второй дроби: $\frac{12a^2b^4}{6ab^4}=2a$. Теперь найдем сумму данных дробей:

$$\frac{3}{4a^2b^3}+\frac{5}{6ab^4}=\frac{3\cdot 3b+5\cdot 2a}{12a^2b^4}=\frac{9b+10a}{12a^2b^4}.$$

Пример 3

Найдем разность дробей $\frac{5a+7b}{a^2+ab}$ и $\frac{7a+5b}{ab+b^2}$.

Чтобы найти наименьший общий знаменатель дробей, разложим знаменатель каждой дроби на множители:

$$\frac{5a+7b}{a^2+ab}-\frac{7a+5b}{ab+b^2}=\frac{5a+7b}{a(a+b)}-\frac{7a+5b}{b(a+b)}.$$

Наименьшим общим знаменателем дробей будет выражение $ab(a+b)$. Дополнительный множитель к первой дроби b, ко второй дроби – a. Тогда получаем

$$\frac{5a+7b}{a^2+ab}-\frac{7a+5b}{ab+b^2}=\frac{5a+7b}{a(a+b)}-\frac{7a+5b}{b(a+b)}=\frac{(5a+7b)b-(7a+5b)a}{ab(a+b)}=$$

$$=\frac{5ab+7b^2-7a^2-5ab}{ab(a+b)}=\frac{7b^2-7a^2}{ab(a+b)}=\frac{7(b+a)(b-a)}{ab(a+b)}=\frac{7(b-a)}{ab}.$$

Преобразование рационального выражения, которое является суммой или разностью целого выражения и дроби, сводится к нахождению суммы или разности дробей, так как любое целое выражение можно представить в виде дроби со знаменателем 1.

Пример 4

Упростим выражение $1-a-\frac{a^3}{a+1}+a^2$.

В данном выражении выделим целое выражение и представим его в виде дроби со знаменателем 1. Выполним вычитание дробей, используя формулу суммы кубов. Тогда получим

$$1-a-\frac{a^3}{a+1}+a^2=a^2-a+1-\frac{a^3}{a+1}=\frac{a^2-a+1}{1}-\frac{a^3}{a+1}=$$

$$=\frac{(a+1)\left(a^2-a+1\right)-a^3}{a+1}=\frac{a^3+1^3-a^3}{a+1}=\frac{1}{a+1}.$$

3. Примеры сложения большого числа дробей

В некоторых задачах удобно выполнить сложение и вычитание не всех дробей сразу, а поочередно.

Пример 5

Докажем, что при любом значении $a>1$ значение выражения $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{a+a^4}$ отрицательно.

Сначала упростим данное выражение, сложив данные дроби. При этом удобно сложить сначала первые две дроби:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}=\frac{1\cdot(1+a)+1\cdot(1-a)}{(1-a)(1+a)}=\frac{1+a+1-a}{1^2-a^2}=\frac{2}{1-a^2}.$$

Теперь к этому результату прибавим третью дробь:

$$\frac{2}{1-a^2}+\frac{2}{1+a^2}=\frac{2\cdot\left(1+a^2\right)+2\cdot\left(1-a^2\right)}{\left(1-a^2\right)\left(1+a^2\right)}=\frac{2+2a^2+2-2a^2}{1^2-\left(a^2\right)^2}=\frac{4}{1-a^4}.$$

Наконец, к этой дроби прибавим последнюю, четвертую дробь:

$$\frac{4}{1-a^4}+\frac{4}{1+a^4}=\frac{4\cdot\left(1-a^4\right)+4\cdot\left(1+a^4\right)}{\left(1-a^4\right)\left(1+a^4\right)}=\frac{4-4a^4+4+4a^4}{1^2-\left(a^4\right)^2}=\frac{8}{1-a^8}.$$

Легко сообразить, что при $a > 1$ (например, при $a = 2$) и величина $a^8 > 1$. Тогда знаменатель $1 - a^8$ полученной дроби $\frac{8}{1-a^8}$ отрицательный. Так как при этом числитель дроби положительный, то дробь будет отрицательной.

Умение складывать рациональные дроби оказывается полезным и при нахождении сумм обыкновенных дробей.

Пример 6

Найдем сумму дробей:

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

Эта сумма содержит 99 дробей. Поэтому сложить сразу эти дроби очень трудно. Тогда представим каждую дробь в этой сумме в виде разности двух более простых дробей.

Каждая дробь в сумме S имеет вид $\frac{1}{x(x+1)}$, где переменная x принимает значения 1, 2, 3, ..., 98, 99. Очевидно, что дробь $\frac{1}{x(x+1)}$ может получиться при сложении дробей со знаменателями x и $x + 1$. Пусть эти дроби имеют числители a и b соответственно. То есть представим дробь в виде $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$.

Сложим дроби в правой части равенства: $\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}=\frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)}=$ $=\frac{ax+a+bx}{x(x+1)}$. В числителе дроби сгруппируем члены, зависящие от x и не зависящие от x, и получим $\frac{ax+a+bx}{x(x+1)}=\frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$.

Итак, получили, что при всех значениях x должно выполняться равенство $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$. Знаменатели дробей в левой и правой частях одинаковы. Чтобы числители также были одинаковы при любом значении x, требуется выполнение двух равенств: $a + b = 0$ и $a = 1$. Из первого равенства найдем $b = -a = -1$. Подставим эти значения a и b в равенство $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ и получим $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ (т. е. представили интересующую нас дробь в виде разности двух более простых дробей).

В равенстве $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ вместо x будем поочередно подставлять значения 1, 2, 3, ..., 98, 99 и получим 99 равенств:

при $x = 1$: $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$;

при $x = 2$: $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$;

при $x = 3$: $\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$;

...

при $x = 98$: $\frac{1}{98 \cdot 99} = \frac{1}{98} - \frac{1}{99}$;

при $x = 99$: $\frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$.

Сложим почленно эти равенства. Тогда в левой части получится требуемая сумма дробей S. При этом в правой части сократятся все дроби, кроме дробей $\frac{1}{1}$ и $\frac{1}{100}$. Итак, получаем $S = \frac{1}{1} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$.

Аналогичный прием можно использовать и для нахождения сумм рациональных дробей.

Пример 7

Упростим выражение $A = \frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \ldots + \frac{1}{(x+98)(x+100)}$.

Каждое слагаемое в этой сумме имеет вид $\frac{1}{(x+n)(x+n+2)}$, где n принимает значения 0, 2, 4, ..., 98. Представим эту дробь в виде суммы двух более простых дробей с числителями a и b и знаменателями $x + n$ и $x + n + 2$ соответственно, т. е.

$\frac{1}{(x+n)(x+n+2)} = \frac{a}{x+n} + \frac{b}{x+n+2}$. Сложим дроби в правой части равенства: $\frac{a}{x+n} + \frac{b}{x+n+2} = \frac{a(x+n+2)+b(x+n)}{(x+n)(x+n+2)} =$

$= \frac{ax+an+2a+bx+bn}{(x+n)(x+n+2)} = \frac{(a+b)x+(a+b)n+2a}{(x+n)(x+n+2)}$.

Равенство $\frac{1}{(x+n)(x+n+2)} = \frac{(a+b)x+(a+b)n+2a}{(x+n)(x+n+2)}$ должно выполняться при любых допустимых значениях x и n. Это возможно, если выполняются равенства $a+b=0$ и $2a=1$. Из последнего равенства найдем $a=\frac{1}{2}$, из первого равенства получим $b=-a=-\frac{1}{2}$.

Подставим эти значения a и b в равенство $\frac{1}{(x+n)(x+n+2)} = \frac{a}{x+n} + \frac{b}{x+n+2}$ и получим

$$\frac{1}{(x+n)(x+n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+2}\right).$$

Таким образом, представили каждую дробь в выражении A в виде разности двух более простых дробей. В это равенство вместо n будем поочередно подставлять значения 0, 2, 4, ..., 96, 98 и получим равенства:

$n=0$: $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)$;

$n=2$: $\frac{1}{(x+2)(x+4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}\right)$;

$n=4$: $\frac{1}{(x+4)(x+6)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6}\right)$;

...

$n=96$: $\frac{1}{(x+96)(x+98)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+96} - \frac{1}{x+98}\right)$;

$n=98$: $\frac{1}{(x+98)(x+100)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+98} - \frac{1}{x+100}\right)$.

Сложим почленно эти равенства. Тогда в левой части получим данное выражение A. При этом в правой части сокращаются все дроби, кроме дробей $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+100}$. Тогда получаем $A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+100}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+100-x}{x(x+100)} = \frac{50}{x(x+100)}$.

IV. Задания на уроках

№ 74 (б); 75 (а); 76 (а, в); 78 (а, б); 80 (в); 81 (г); 82 (б, г); 84 (а); 87 (б); 89 (б); 90 (а, г); 92 (а); 94 (а, г); 96 (б, г); 98 (а); 99 (б); 100; 102.

V. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте правило приведения дробей к общему знаменателю. Дайте определение понятия дополнительного множителя к числителю и знаменателю дроби.
2. Докажите, что сложение и вычитание дробей с разными знаменателями сводится к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями.
3. Как складывают и вычитают дроби с разными знаменателями?
4. Как сложить (вычесть) целое выражение и дробь?

VI. Творческие задания

1. Найдите a и b из тождества:

а) $\frac{3}{(x+2)(x+5)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+5}$;

б) $\frac{2}{x^2+2x-3} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-1}$;

в) $\frac{7}{(x-2)(x+4)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+5}$;

г) $\frac{5}{x^2-x-6} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2}$.

Ответы: а) $a = 1$, $b = -1$; б) $a = -0{,}5$, $b = 0{,}5$ (указание: предварительно убедитесь, что $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$; в) $a = \frac{7}{6}$, $b = -\frac{7}{6}$; г) $a = 1$, $b = -1$ (убедитесь, что $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$).

2. Вычислите сумму дробей:

а) $S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{97 \cdot 99} + \frac{1}{99 \cdot 101}$;

б) $S = \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \ldots + \frac{1}{96 \cdot 98} + \frac{1}{98 \cdot 100}$;

в) $S = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{97\cdot 101} + \frac{1}{101\cdot 105}$;

г) $S = \frac{1}{2\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 12} + \frac{1}{12\cdot 17} + \ldots + \frac{1}{92\cdot 97} + \frac{1}{97\cdot 102}$.

Ответы: а) $S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{101}\right) = \frac{50}{101}$; б) $S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100}\right) = \frac{49}{200}$; в) $S = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{105}\right) = \frac{26}{105}$; г) $S = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{102}\right) = \frac{5}{51}$ (указание: каждую дробь в сумме S представьте в виде разности двух более простых дробей).

3. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)}$;

б) $\frac{1}{x(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+9)} + \frac{1}{(x+9)(x+12)}$;

в) $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \ldots + \frac{1}{(x+98)(x+99)} + \frac{1}{(x+99)(x+100)}$;

г) $\frac{1}{x(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+6)} + \ldots + \frac{1}{(x+96)(x+99)} + \frac{1}{(x+99)(x+102)}$.

Ответы: а) $\frac{5}{x(x+5)}$; б) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+12}\right) = \frac{4}{x(x+12)}$; в) $\frac{100}{x(x+100)}$; г) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+102}\right) = \frac{4}{x(x+102)}$ (указание: каждую дробь в сумме представьте в виде разности двух более простых дробей).

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 74 (а); 75 (б); 76 (г); 78 (в); 80 (а); 81 (в); 82 (а, в); 84 (б); 85 (б); 87 (а); 88 (а); 89 (а); 90 (б, в); 92 (б); 94 (б, в); 96 (а, в); 97 (а, г); 98 (б); 99 (а); 101.

Урок 12. Контрольная работа № 1 по теме «Сумма и разность дробей»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 самые простые, варианты 3, 4 сложнее и варианты 5, 6 самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую свободу выбора учащимся. При таких же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла, вариантов 5, 6 – 1 балл (т. е. оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач).

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимися (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{6}{x+1}$.

2. Сократите дробь $\dfrac{16a^3b^7}{8a^5b^3}$.

3. Упростите выражение $\dfrac{x^2+3xy}{xy+3y^2}$.

4. Выполните действия: $\dfrac{c}{c+2}-\dfrac{c^2-2c-4}{c^2+2c}$.

5. Найдите значение выражения $\dfrac{a^2-2b}{a}-a$ при $a=0{,}2$, $b=4$.

6. Постройте график функции $y=\dfrac{x^2-4x+4}{2-x}$.

Вариант 2

1. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\frac{5}{x+3}-\frac{4}{x-1}$.

2. Сократите дробь $\frac{18a^4b^8}{6a^7b^4}$.

3. Упростите выражение $\frac{2x^2+xy}{2xy+y^2}$.

4. Выполните действия: $\frac{a}{a-3}-\frac{a^2-2a+6}{a^2-3a}$.

5. Найдите значение выражения $\frac{a^2+3b}{a}-a$ при $a=0{,}6$, $b=2$.

6. Постройте график функции $y=\frac{x^2-6x+9}{3-x}$.

Вариант 3

1. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\frac{3x-6}{x-2}+\frac{2x-6}{x+1}$.

2. Сократите дробь $\frac{x^2-4x+4}{4-x^2}$.

3. Упростите выражение $\frac{a+3}{a^2+a}-\frac{1}{a+1}+\frac{2}{a}$.

4. Выделите целую и дробную части в выражении $\frac{2x^2-4x+7}{x-2}$.

5. Постройте график функции $y=\frac{x^2-6x+9}{3-x}+\frac{4x^2-6x}{x}$.

6. Найдите значения a и b, для которых при всех допустимых значениях x выполнено равенство $\frac{ax^2+x+b}{x+2}=2x-3$.

Вариант 4

1. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\frac{5x+15}{x+3}+\frac{3x-1}{x-2}$.

2. Сократите дробь $\frac{9-x^2}{x^2+6x+9}$.

3. Упростите выражение $\frac{a-3}{a^2-a}-\frac{1}{a-1}-\frac{4}{a}$.

4. Выделите целую и дробную части в выражении $\frac{3x^2-12x+5}{x-4}$.

5. Постройте график функции $y=\frac{x^2-4x+4}{2-x}+\frac{3x^2-4x}{x}$.

6. Найдите значения a и b, для которых при всех допустимых значениях x выполнено равенство $\dfrac{ax^2 - 8x + b}{x - 3} = 3x + 1$.

Вариант 5

1. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\dfrac{4x + 4}{x + 1} + \dfrac{x^2 - 6x + 9}{3 - x} + \dfrac{2x + 5}{4 - x^2}$.

2. Сократите дробь $\dfrac{ax + 2b + 2a + bx}{3a - bx + 3b - ax}$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{a^2}{a^2 - 9} + \dfrac{3}{a + 3} - \dfrac{a}{a - 3}$ при $a = 1{,}5$.

4. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{|x - 2|}$.

5. Сократите дробь $\dfrac{x^3 + x^2 + x - 3}{x - 1}$.

6. Найдите значения a и b, для которых при всех допустимых значениях x выполнено равенство $\dfrac{x + 3}{6x^2 + x - 2} = \dfrac{a}{2x - 1} + \dfrac{b}{3x + 2}$.

Вариант 6

1. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\dfrac{3x - 3}{x - 1} + \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} - \dfrac{5x - 4}{9 - x^2}$.

2. Сократите дробь $\dfrac{ax + 3b - 3a - bx}{ax - b + a - bx}$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{4}{x + 2} - \dfrac{3}{x - 2} + \dfrac{12}{x^2 - 4}$ при $x = -0{,}6$.

4. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{|3 - x|}$.

5. Сократите дробь $\dfrac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{x + 1}$.

6. Найдите значения a и b, для которых при всех допустимых значениях x выполнено равенство $\dfrac{8x + 1}{6x^2 + 7x - 3} = \dfrac{a}{2x + 3} + \dfrac{b}{3x - 1}$.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ (число решивших задачу правильно или почти правильно);

± (число решивших задачу со значительными погрешностями);

– (число не решивших задачу);

∅ (число не решавших задачу).

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими их).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям и разобрать наиболее трудные варианты).

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. $x \neq 2,\ x \neq -1$.
2. $\dfrac{2b^4}{a^2}$ (при $a,\ b \neq 0$).
3. $\dfrac{x}{y}$ (при $y \neq 0,\ x + 3y \neq 0$).
4. $\dfrac{2}{c}$ (при $c \neq 0,\ c \neq -2$).
5. –40.
6. График функции $y = 2 - x$ при $x \neq 2$.

Вариант 2

1. $x \neq -3,\ x \neq 1$.
2. $\dfrac{3b^4}{a^3}$ (при $a,\ b \neq 0$).
3. $\dfrac{x}{y}$ (при $y \neq 0,\ 2x + y \neq 0$).
4. $\dfrac{2}{a}$ (при $a \neq 0,\ a \neq 3$).
5. 10.
6. График функции $y = 3 - x$ при $x \neq 3$.

Вариант 3

1. $x \neq 2,\ x \neq -1$.
2. $\dfrac{2 - x}{2 + x}$ (при $x \neq \pm 2$).
3. $\dfrac{2a + 5}{a(a + 1)}$ (при $a \neq 0,\ a \neq -1$).
4. $2x + \dfrac{7}{x - 2}$ (при $x \neq 2$).
5. График функции $y = 3x - 3$ при $x \neq 0,\ x \neq 3$.
6. $a = 2,\ b = -6$ (при $x \neq -2$).

Вариант 4

1. $x \neq -3,\ x \neq 2$.
2. $\dfrac{3 - x}{3 + x}$ (при $x \neq -3$).
3. $\dfrac{1 - 4a}{a(a - 1)}$ (при $a \neq 0,\ a \neq 1$).
4. $3x + \dfrac{5}{x - 4}$ (при $x \neq 4$).
5. График функции $y = 2x - 2$ при $x \neq 0,\ x \neq 2$.
6. $a = 3,\ b = -3$ (при $x \neq 3$).

Вариант 5

1. Заметим, что допустимые значения переменной устанавливаются до начала преобразования выражения. Поэтому в выражении $\frac{4x+4}{x+1}+\frac{x^2-6x+9}{3-x}+\frac{2x+5}{4-x^2}$ допустимые значения определяются тремя условиями: $x+1\neq 0$, $3-x\neq 0$, $4-x^2\neq 0$. Тогда находим $x\neq -1$, $x\neq 3$, $x\neq \pm 2$. Если сократить первую и вторую дроби, то получим выражение $4+3-x+\frac{2x+5}{4-x^2}$. Однако допустимые значения переменной для этого выражения будут уже другие.

Ответ: $x\neq -1$, $x\neq 3$, $x\neq \pm 2$.

2. Используя способ группировки, разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее. Получаем

$$\frac{ax+2b+2a+bx}{3a-bx+3b-ax}=\frac{(ax+bx)+(2a+2b)}{(3a+3b)-(ax+bx)}=\frac{x(a+b)+2(a+b)}{3(a+b)-x(a+b)}=$$

$$=\frac{(a+b)(x+2)}{(a+b)(3-x)}=\frac{x+2}{3-x}.$$

Преобразования справедливы при $a\neq -b$, $x\neq 3$.

Ответ: $\frac{x+2}{3-x}$ (при $a\neq -b$, $x\neq 3$).

3. Сначала упростим данное выражение, выполнив указанные действия:

$$\frac{a^2}{a^2-9}+\frac{3}{a+3}-\frac{a}{a-3}=\frac{a^2+3(a-3)-a(a+3)}{a^2-9}=$$

$$=\frac{a^2+3a-9-a^2-3a}{a^2-9}=\frac{-9}{a^2-9}=\frac{9}{9-a^2}.$$

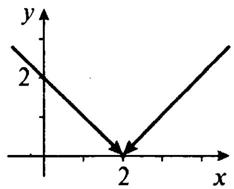
Теперь найдем значение этого выражения при $a=1{,}5$. Получаем $\frac{9}{9-1{,}5^2}=\frac{9}{(3-1{,}5)(3+1{,}5)}=\frac{9}{1{,}5\cdot 4{,}5}=\frac{2}{1{,}5}=\frac{2\cdot 2}{3}=\frac{4}{3}$.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

4. Учтем свойство модуля $a^2=|a|^2$ и преобразуем функцию:

$$y=\frac{x^2-4x+4}{|x-2|}=\frac{(x-2)^2}{|x-2|}=\frac{|x-2|^2}{|x-2|}=|x-2| \text{ (при } x\neq 2).$$

Построим график функции $y=|x-2|$. Он получается из графика функции $y=|x|$ смещением на две единицы вправо. Учтем, что $x\neq 2$ (стрелками указана точка, не входящая в график).



Ответ: см. рисунок.

5. Если дробь сократима, то ее числитель имеет множитель, равный знаменателю. Поэтому разложим числитель на множители, все время выделяя в качестве множителя знаменатель. Получаем $x^3 + x^2 + x - 3 = (x^3 - x^2) + (2x^2 - 2x) + (3x - 3) = x^2(x - 1) + 2x(x - 1) + 3(x - 1) = (x - 1)(x^2 + 2x + 3)$. Теперь можем сократить данную дробь:

$$\frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x - 1} = \frac{(x-1)\left(x^2 + 2x + 3\right)}{x - 1} = x^2 + 2x + 3 \text{ (при } x \neq 1).$$

Ответ: $x^2 + 2x + 3$ (при $x \neq 1$).

6. В правой части равенства $\frac{x+3}{6x^2 + x - 2} = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{3x+2}$ сложим дроби и получим:

$$\frac{x+3}{6x^2 + x - 2} = \frac{a(3x+2) + b(2x-1)}{(2x-1)(3x+2)}, \text{ или}$$

$$\frac{x+3}{6x^2 + x - 2} = \frac{3ax + 2a + 2bx - b}{6x^2 + x - 2}, \text{ или}$$

$$\frac{x+3}{6x^2 + x - 2} = \frac{(3a + 2b)x + (2a - b)}{6x^2 + x - 2}.$$

Так как знаменатели дробей одинаковы, то дроби будут равны при всех допустимых значениях x, если при таких x совпадут числители. Это возможно только при выполнении двух условий: $\begin{cases} 3a + 2b = 1, \\ 2a - b = 3. \end{cases}$ Решив такую систему линейных уравнений, найдем $a = 1$, $b = -1$. Допустимые значения переменной $x \neq \frac{1}{2}$ и $x \neq -\frac{2}{3}$.

Ответ: $a = 1$, $b = -1$ (при $x \neq \frac{1}{2}, x \neq -\frac{2}{3}$).

Вариант 6

1. Заметим, что допустимые значения переменной устанавливаются до начала преобразования выражения. Поэтому в выражении $\frac{3x-3}{x-1} + \frac{x^2 + 4x + 4}{x+2} - \frac{5x-4}{9-x^2}$ допустимые значения определяются тремя условиями: $x - 1 \neq 0$, $x + 2 \neq 0$, $9 - x^2 \neq 0$. Тогда

находим $x \neq 1$, $x \neq -2$, $x \neq \pm 3$. Если сократить первую и вторую дроби, то получим выражение $3 + x + 2 - \frac{5x - 4}{9 - x^2}$. Однако допустимые значения переменной для этого выражения будут уже другие.

Ответ: $x \neq 1$, $x \neq -2$, $x \neq \pm 3$.

2. Используя способ группировки, разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее. Получаем

$$\frac{ax + 3b - 3a - bx}{ax - b + a - bx} = \frac{(ax - bx) - (3a - 3b)}{(ax - bx) + (a - b)} = \frac{x(a - b) - 3(a - b)}{x(a - b) + (a - b)} =$$

$$= \frac{(a - b)(x - 3)}{(a - b)(x + 1)} = \frac{x - 3}{x + 1}.$$

Преобразования справедливы при $a \neq b$, $x \neq -1$.

Ответ: $\frac{x - 3}{x + 1}$ (при $a \neq b$, $x \neq -1$).

3. Сначала упростим данное выражение, выполнив указанные действия:

$$\frac{4}{x + 2} - \frac{3}{x - 2} + \frac{12}{x^2 - 4} = \frac{4(x - 2) - 3(x + 2) + 12}{x^2 - 4} =$$

$$= \frac{4x - 8 - 3x - 6 + 12}{x^2 - 4} = \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{x + 2}.$$

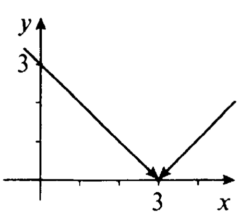
Теперь найдем значение этого выражения при $x = -0{,}6$. Получаем $\frac{1}{-0{,}6 + 2} = \frac{1}{1{,}4} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$.

Ответ: $\frac{5}{7}$.

4. Учтем свойство модуля $a^2 = |a^2|$ и преобразуем функцию:

$$y = \frac{x^2 - 6x + 9}{|3 - x|} = \frac{(x - 3)^2}{|x - 3|} = \frac{|x - 3|^2}{|x - 3|} = |x - 3| \text{ (при } x \neq 3).$$

Построим график функции $y = |x - 3|$. Он получается из графика функции $y = |x|$ смещением на три единицы вправо. Учтем, что $x \neq 3$ (стрелками указана точка, не входящая в график).



Ответ: см. рисунок.

5. Если дробь сократима, то ее числитель имеет множитель, равный знаменателю. Поэтому разложим числитель на множители, все время выделяя в качестве множителя знаменатель. Получаем $x^3 - 2x^2 + x + 4 = (x^3 + x^2) + (-3x^2 - 3x) + (4x + 4) = x^2(x + 1) - 3x(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(x^2 - 3x + 4)$.

Теперь легко сократить данную дробь:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{x+1} = \frac{(x+1)(x^2 - 3x + 4)}{x+1} = x^2 - 3x + 4 \text{ (при } x \neq -1).$$

Ответ: $x^2 - 3x + 4$ (при $x \neq -1$).

6. В правой части равенства $\frac{8x+1}{6x^2 + 7x - 3} = \frac{a}{2x+3} + \frac{b}{3x-1}$ сложим дроби и получим:

$$\frac{8x+1}{6x^2 + 7x - 3} = \frac{a(3x-1) + b(2x+3)}{(2x+3)(3x-1)}, \text{ или}$$

$$\frac{8x+1}{6x^2 + 7x - 3} = \frac{3ax - a + 2bx + 3b}{6x^2 + 7x - 3}, \text{ или}$$

$$\frac{8x+1}{6x^2 + 7x - 3} = \frac{(3a + 2b)x + (3b - a)}{6x^2 + 7x - 3}.$$

Так как знаменатели дробей одинаковы, то дроби будут равны при всех допустимых значениях x, если при таких x совпадут числители. Это возможно только при выполнении двух условий: $\begin{cases} 3a + 2b = 8, \\ 3b - a = 1. \end{cases}$ Решив такую систему линейных уравнений, найдем $a = 2$, $b = 1$. Допустимые значения переменной $x \neq -\frac{3}{2}$ и $x \neq \frac{1}{3}$.

Ответ: $a = 2$, $b = 1$ (при $x \neq -\frac{3}{2}, x \neq \frac{1}{3}$).

VI. Подведение итогов урока

§ 3. ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЧАСТНОЕ ДРОБЕЙ

Уроки 13–15. Умножение дробей. Возведение дроби в степень

Цель: изучить умножение дробей и возведение их в степень.

Планируемые результаты: освоить навыки умножения дробей и возведения дроби в степень.

Тип уроков: продуктивные уроки, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

План уроков

1. Умножение дробей.
2. Возведение дроби в степень.

1. Умножение дробей

При умножении обыкновенных дробей получается дробь, числитель которой равен произведению числителей дробей, а знаменатель – произведению знаменателей. Например, $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{11}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 11}=\frac{21}{55}$. По тому же правилу находят и произведения рациональных дробей, т. е. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ при любых допустимых значениях переменных (т. е. при $b\neq 0$ и $d\neq 0$). Докажем это равенство.

Пусть $\frac{a}{b}=m$ и $\frac{c}{d}=n$ (очевидно, что $b\neq 0$ и $d\neq 0$). Почленно умножим эти равенства и получим $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=mn$. Из равенства $\frac{a}{b}=m$ по определению частного имеем $a=bm$, из равенства $\frac{c}{d}=n$ получаем: $c=dn$. Также почленно умножим равенства $a=bm$ и $c=dn$ и получим $ac=bm\cdot dn=(bd)\cdot(mn)$. Выразим из этого равенства $mn=\frac{ac}{bd}$. Сравнивая два равенства $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=mn$ и $\frac{ac}{bd}=mn$, имеем тождество $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ (при $b\neq 0$ и $d\neq 0$), из которого следует правило умножения дробей. Чтобы умножить дробь на дробь, надо перемножить их числители и перемножить их знаменатели, первое произведение записать числителем, второе – знаменателем дроби.

Пример 1

Умножим дроби $\frac{12a^3}{5b^2}$ и $\frac{15b^4}{28a^6}$.

Используя правило умножения дробей, получаем

$$\frac{12a^3}{5b^2}\cdot\frac{15b^4}{28a^6}=\frac{12a^3\cdot 15b^4}{5b^2\cdot 28a^6}=\frac{3\cdot 4a^3\cdot 5b^2\cdot 3b^2}{5b^2\cdot 4a^3\cdot 7a^3}=\frac{3\cdot 3b^2}{7a^3}=\frac{9b^2}{7a^3}.$$

Пример 2

Умножим дроби $\frac{2ab+b^2}{3a}$ и $\frac{6a^2}{4a^2-b^2}$.

Воспользуемся правилом умножения дробей. Затем числитель первой дроби и знаменатель второй дроби разложим на множители и сократим получившуюся дробь. Имеем

$$\frac{2ab+b^2}{3a}\cdot\frac{6a^2}{4a^2-b^2}=\frac{\left(2ab+b^2\right)\cdot 6a^2}{3a\left(4a^2-b^2\right)}=\frac{b(2a+b)\cdot 6a^2}{3a(2a-b)(2a+b)}=$$

$$=\frac{b\cdot 2a}{2a-b}=\frac{2ab}{2a-b}.$$

Пример 3

Представим произведение дробей $\frac{a-b}{a+3b}$ и $\frac{a+b}{a-2b}$ в виде рациональной дроби.

Используем правило умножения дробей. В числителе и знаменателе получившейся дроби умножим многочлены. Тогда получим $\frac{a-b}{a+3b}\cdot\frac{a+b}{a-2b}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+3b)(a-2b)}=\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+3ab-6b^2}$.

Пример 4

Умножим дробь $\frac{x+2y}{x+y}$ и многочлен x^2-y^2.

Как и при сложении (вычитании) дробей, представим многочлен в виде дроби со знаменателем 1 и воспользуемся правилом умножения дробей. Имеем

$$\frac{x+2y}{x+y}\cdot\left(x^2-y^2\right)=\frac{x+2y}{x+y}\cdot\frac{x^2-y^2}{1}=\frac{(x+2y)\left(x^2-y^2\right)}{(x+y)\cdot 1}=$$

$$=\frac{(x+2y)(x-y)(x+y)}{x+y}=(x+2y)(x-y)=x^2-xy+2xy-2y^2=$$

$$=x^2+xy-2y^2.$$

Правило умножения дробей, разумеется, справедливо для произведения любого числа перемножаемых дробей.

Пример 5

Найдем произведение дробей $\frac{2a}{3a-2b}$, $\frac{9a^2-4b^2}{8a^2b}$ и $\frac{3b^2}{3a+2b}$.

Используем правило умножения дробей и получим

$$\frac{2a}{3a-2b}\cdot\frac{9a^2-4b^2}{8a^2b}\cdot\frac{3b^2}{3a+2b}=\frac{2a\cdot\left(9a^2-4b^2\right)\cdot 3b^2}{(3a-2b)\cdot 8a^2b\cdot(3a+2b)}=$$

$$=\frac{2a\cdot(3a-2b)(3a+2b)\cdot 3b^2}{(3a-2b)\cdot 8a^2b\cdot(3a+2b)}=\frac{3b}{4a}.$$

2. Возведение дроби в степень

Теперь рассмотрим возведение дроби в степень. При возведении обыкновенной дроби в степень ее числитель и знаменатель возводят в эту степень. Например: $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$. Такое же правило справедливо и для рациональной дроби: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Докажем это.

По определению степени имеем $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ множителей}}$. Используя правило умножения дробей и определение степени, получим $\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ множителей}} = \underbrace{\frac{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}}_{n\text{ множителей}} = \frac{a^n}{b^n}$. Итак, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Из доказанного тождества следует правило возведения дроби в степень. Чтобы возвести дробь в степень, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель дроби и первый результат записать в числителе, второй – в знаменателе дроби.

Пример 6

Возведем дробь $\frac{3a^2}{2b^3}$ в четвертую степень.

Используем правило возведения дроби в степень и учтем свойства степеней. Получаем $\left(\frac{3a^2}{2b^3}\right)^4 = \frac{\left(3a^2\right)^4}{\left(2b^3\right)^4} = \frac{3^4\cdot\left(a^2\right)^4}{2^4\cdot\left(b^3\right)^4} = \frac{81a^8}{16b^{12}}$.

Пример 7

Возведем в квадрат дробь $\frac{a^2-1}{a^2+2a+1}$.

Используем формулы сокращенного умножения и сначала сократим дробь: $\frac{a^2-1}{a^2+2a+1} = \frac{(a-1)(a+1)}{(a+1)^2} = \frac{a-1}{a+1}$. Теперь возведем в квадрат эту дробь. Для этого возведем в квадрат ее числитель и знаменатель (правило возведения дроби в степень). Получаем $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 = \frac{(a-1)^2}{(a+1)^2} = \frac{a^2-2a+1}{a^2+2a+1}$.

III. Задания на уроках

№ 108 (а, г); 109 (а); 111 (б); 112 (в); 114 (а); 115 (а); 117 (а, г); 118; 119 (а, б); 121 (а); 122 (б); 125 (б); 127 (б, г).

IV. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте правило умножения дробей.
2. Докажите правило умножения дробей.
3. Как возвести дробь в степень?
4. Докажите правило возведения дроби в степень.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 108 (б); 110 (в); 111 (а); 112 (б); 113 (г); 114 (б); 115 (г); 117 (в); 119 (в, г); 121 (б); 123 (а); 124; 126 (а, в); 128.

Уроки 16, 17. Деление дробей

Цель: изучить деление дробей.

Планируемые результаты: отработать навыки деления рациональных дробей.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Выполните умножение: $\frac{42x^3y^4}{z^5}\cdot\frac{z^2}{7(xy)^2}$.

а) $\frac{6xy}{z^3}$; б) $\frac{6xy^2}{z^3}$; в) $\frac{6x^2y^2}{z^4}$.

2. Умножьте дроби $\frac{a^2-6a+9}{a^2-3a+9}\cdot\frac{a^3+27}{4a-12}$.

а) $\frac{a^2-9}{4}$; б) $\frac{(a-3)^2}{4}$; в) $\frac{(a+3)^2}{4}$.

3. Упростите выражение $\frac{x^2-ax+bx-ab}{x^2+ax-bx-ab}\cdot\frac{x^2+2ax+a^2}{x^2+2bx+b^2}$.

а) $\frac{x-a}{x-b}$; б) $\frac{(x-a)^2}{(x-b)^2}$; в) $\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}$.

Вариант 2

1. Выполните умножение: $\dfrac{48x^5y^7}{z^4}\cdot\dfrac{z^3}{8(xy)^2}$.

а) $\dfrac{6x^2y^4}{z}$; б) $\dfrac{6x^3y^5}{z^2}$; в) $\dfrac{6x^3y^5}{z}$.

2. Умножьте дроби $\dfrac{a^3-8}{3a+6}\cdot\dfrac{a^2+4a+4}{a^2+2a+4}$.

а) $\dfrac{a^2-4}{3}$; б) $\dfrac{(a-2)^2}{3}$; в) $\dfrac{(a+2)^2}{3}$.

3. Упростите выражение $\dfrac{x^2-ax+bx-ab}{x^2-ax-bx+ab}\cdot\dfrac{x^2-2bx+b^2}{x^2-2ax+a^2}$.

а) $\dfrac{x^2-b^2}{(x-a)^2}$; б) $\dfrac{\left(x-b^2\right)}{x^2-a^2}$; в) $\dfrac{(x+b)^2}{(x-a)^2}$.

III. Работа по теме уроков

При делении обыкновенных дробей операцию деления заменяют операцией умножения. При этом первую дробь умножают на дробь, обратную второй. Например, $\dfrac{3}{7}:\dfrac{5}{11}=\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{11}{5}=\dfrac{33}{35}$. Таким же образом можно делить и рациональные дроби, т. е. $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}$. Докажем это равенство для любых допустимых значений переменных, т. е. для $b\neq0$, $c\neq0$ и $d\neq0$. Для этого надо доказать, что произведение выражения $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}$ и дроби $\dfrac{c}{d}$ равно дроби $\dfrac{a}{b}$.

Проверим это. Получаем $\left(\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}\right)\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\left(\dfrac{d}{c}\cdot\dfrac{c}{d}\right)=\dfrac{a}{b}\cdot1=\dfrac{a}{b}$. Из равенства $\left(\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}\right)\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}$ по определению частного имеем $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}$.

Из полученного тождества следует правило деления дробей: чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

Используя правило деления дробей и правило умножения дробей, получим $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$.

Пример 1

Разделим дробь $\dfrac{15x^3}{4y^4}$ на дробь $\dfrac{5x^2}{2y}$.

Используя правило деления дробей, получим

$$\frac{15x^3}{4y^4}:\frac{5x^2}{2y}=\frac{15x^3\cdot 2y}{4y^4\cdot 5x^2}=\frac{3x}{2y^3}.$$

Пример 2

Разделим дробь $\dfrac{a-1}{a+3}$ на дробь $\dfrac{3-a}{a+1}$.

Воспользуемся правилом деления дробей. Имеем

$$\frac{a-1}{a+3}:\frac{3-a}{a+1}=\frac{a-1}{a+3}\cdot\frac{a+1}{3-a}=\frac{(a-1)(a+1)}{(a+3)(3-a)}=\frac{(a-1)(a+1)}{(3+a)(3-a)}=$$

$$=\frac{a^2-1}{9-a^2}.$$

Пример 3

Разделим многочлен $a-2b$ на дробь $\dfrac{a^2-4b^2}{5ab}$.

При делении многочлена на дробь (или наоборот), как и ранее, записывают многочлен в виде дроби со знаменателем 1 и используют правило деления дробей. Имеем

$$(a-2b):\frac{a^2-4b^2}{5ab}=\frac{a-2b}{1}:\frac{a^2-4b^2}{5ab}=\frac{a-2b}{1}\cdot\frac{5ab}{a^2-4b^2}=$$

$$=\frac{(a-2b)\cdot 5ab}{1\cdot(a-2b)(a+2b)}=\frac{5ab}{a+2b}.$$

Заметим, что на двух последних занятиях были использованы *свойства степеней*, поэтому напомним их.

1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ (при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются, а основание остается прежним).

2. $a^m:a^n=a^{m-n}$ (при делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней вычитаются, а основание остается прежним).

3. $(a^m)^n=a^{mn}$ (при возведении степени в степень показатели степеней умножаются, а основание остается прежним).

4. $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$ (при возведении в степень произведения чисел в эту степень возводится каждый множитель и результаты перемножаются).

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$ (при возведении в степень дроби в эту степень возводится числитель и знаменатель дроби и результаты делятся).

IV. Задания на уроках

№ 132 (а, в); 134 (а, б); 136 (а); 138 (а, б, д); 139 (а); 140 (а); 141 (а); 142 (б); 143 (а).

V. Контрольные вопросы

1. Как делят рациональные дроби?
2. Докажите правило деления дробей.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 132 (б, г); 133 (г); 134 (в, г); 135 (а); 136 (б); 137 (г); 139 (б); 140 (б); 141 (б); 142 (а); 143 (б).

Уроки 18–20. Преобразование рациональных выражений

Цель: освоить навыки преобразования рациональных выражений.

Планируемые результаты: отработать навыки преобразования алгебраических рациональных выражений.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Выполните деление $\dfrac{42a^3b^2}{17c^3} : \dfrac{14(ab)^2}{51c}$.

2. Разделите дроби $\dfrac{b-8}{a^2-4} : \dfrac{2b-16}{3a-6}$.

3. Упростите выражение $\dfrac{27+x^3}{81-x^4} : \dfrac{x^2-3x+9}{x^2+9}$.

Вариант 2

1. Выполните деление $\dfrac{45a^4b^3}{57c^4} : \dfrac{15(ab)^3}{19c^2}$.

2. Разделите дроби $\dfrac{6a-30}{3b+5} : \dfrac{a^2-25}{6b+10}$.

3. Упростите выражение $\frac{8+a^3}{16-a^4}:\frac{a^2-2a+4}{a^2+4}$.

III. Работа по теме уроков

План уроков

1. Преобразование выражений.
2. Среднее арифметическое и среднее гармоническое чисел.

1. Преобразование выражений

На практике часто используется преобразование рациональных выражений.

Пример 1

Рассмотрим рациональное выражение

$$\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{x-y}\right)\left(x-\frac{x^2+y^2}{x+y}\right).$$

Оно представляет собой произведение двух множителей. Первый множитель является суммой двух рациональных дробей $\frac{1}{y}$ и $\frac{2}{x-y}$. Результатом сложения будет также рациональная дробь.

Второй множитель является разностью одночлена x и рациональной дроби $\frac{x^2+y^2}{x+y}$. Одночлен x можно представить в виде дроби со знаменателем 1. Тогда разностью двух рациональных дробей также будет рациональная дробь.

Последней операцией является умножение двух рациональных дробей. Произведением их вновь будет рациональная дробь.

Из примера видно, что преобразование любого рационального выражения сводится к сложению, вычитанию, умножению и делению рациональных дробей (как следует из правил действий с дробями). Поэтому любое рациональное выражение можно представить в виде рациональной дроби.

Пример 2

Преобразуем выражение из примера 1 в рациональную дробь.

Выражение можно преобразовать по действиям, при достаточной практике преобразования можно выполнять и сразу. Рассмотрим эти подходы.

Способ 1. Сначала выполним сложение дробей в первой скобке. Эта операция будет первым действием:

$$1)\ \frac{1}{y}+\frac{2}{x-y}=\frac{1\cdot(x-y)+2\cdot y}{y(x-y)}=\frac{x-y+2y}{y(x-y)}=\frac{x+y}{y(x-y)}.$$

Теперь во второй скобке из одночлена вычтем дробь. Такая операция будет вторым действием:

$$2)\ x-\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{x}{1}-\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{x(x+y)-1\left(x^2+y^2\right)}{x+y}=$$

$$=\frac{x^2+xy-x^2-y^2}{x+y}=\frac{xy-y^2}{x+y}=\frac{y(x-y)}{x+y}.$$

Наконец, умножим рациональные дроби, полученные в первом и втором действиях. Эта операция будет третьим действием:

$$3)\ \frac{x+y}{y(x-y)}\cdot\frac{y(x-y)}{x+y}=\frac{(x+y)y(x-y)}{y(x-y)(x+y)}=1.$$

В результате преобразований была получена рациональная дробь. В данном случае такая дробь представляет собой число 1.

Способ 2. Параллельно будем выполнять сложение в первой скобке и вычитание во второй скобке. Тогда получим:

$$\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{x-y}\right)\cdot\left(x-\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)=\frac{x-y+2y}{y(x-y)}\cdot\frac{x(x+y)-\left(x^2+y^2\right)}{x+y}=$$

$$\frac{x+y}{y(x-y)}\cdot\frac{x^2+xy-x^2-y^2}{x+y}=\frac{x+y}{y(x-y)}\cdot\frac{xy-y^2}{x+y}=$$

$$=\frac{(x+y)y(x-y)}{y(x-y)(x+y)}=1.$$

В ряде задач встречаются выражения, которые необходимо упростить (сокращением дроби) до начала выполнения операций.

Пример 3

Упростим выражение $\dfrac{x^2+4xy+4y^2}{x+2y}-\dfrac{x^2-4xy+4y^2}{x-2y}$.

Обратим внимание на то, что числитель первой дроби является квадратом суммы, а числитель второй дроби – квадратом разности (формулы сокращенного умножения). Поэтому имеем:

$$\frac{x^2+4xy+4y^2}{x+2y}-\frac{x^2-4xy+4y^2}{x-2y}=\frac{(x+2y)^2}{x+2y}-\frac{(x-2y)^2}{x-2y}=$$

$$=(x+2y)-(x-2y)=x+2y-x+2y=4y.$$

При преобразованиях громоздких дробей (числители и знаменатели которых, в свою очередь, представляют собой дроби) полезно использовать основное свойство дроби.

Пример 4

Упростим выражение $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2\right):\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)$.

Преобразования данного выражения можно выполнить по-разному. Можно преобразовать числитель и знаменатель дроби, затем разделить первый результат на второй. Проще использовать основное свойство дроби. Мы видим, что общий знаменатель в числителе и знаменателе равен ab. Поэтому умножим числитель и знаменатель данной дроби на выражение ab. Получаем

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}=\frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)ab}{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)ab}=\frac{\frac{a}{b}\cdot ab+\frac{b}{a}\cdot ab-2ab}{\frac{a}{b}\cdot ab+\frac{b}{a}\cdot ab+2ab}=$$

$$=\frac{a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2+2ab}=\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}=\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$

В выражениях, в которых повторяется одна и та же величина, удобно ввести новую переменную, обозначив ею повторяющуюся величину.

Пример 5

Упростим выражение

$$\left(\frac{x^2+y^2}{b^2-\left(x^2+y^2\right)b}+\frac{b}{\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2+y^2\right)b}\right)\cdot\frac{\left(x^2+y^2\right)b}{b-x^2-y^2}.$$

Видно, что переменные x и y входят в этот пример только в виде суммы $x^2 + y^2$. Поэтому введем новую переменную $a = x^2 + y^2$ и для величин a и b запишем выражение. Имеем

$$\left(\frac{x^2+y^2}{b^2-\left(x^2+y^2\right)b}+\frac{b}{\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2+y^2\right)b}\right)\cdot\frac{\left(x^2+y^2\right)b}{b-x^2-y^2}=$$

$$=\left(\frac{a}{b^2-ab}+\frac{b}{a^2-ab}\right)\cdot\frac{ab}{b-a}=\left(\frac{a}{b(b-a)}+\frac{b}{a(a-b)}\right)\cdot\frac{ab}{b-a}=$$

$$=\left(\frac{a}{b(b-a)}-\frac{b}{a(b-a)}\right)\cdot\frac{ab}{b-a}=\frac{a\cdot a-b\cdot b}{ab(b-a)}\cdot\frac{ab}{b-a}=$$

$$=\frac{a^2-b^2}{ab(b-a)}\cdot\frac{ab}{b-a}=\frac{(a-b)(a+b)ab}{ab(b-a)(b-a)}=\frac{(a-b)(a+b)}{(b-a)^2}=$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Теперь вернемся к старым переменным x и y и получим окончательный ответ: $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{x^2+y^2+b}{x^2+y^2-b}$.

2. Среднее арифметическое и среднее гармоническое чисел

Многие математические задачи связаны с понятием среднего значения: среднее арифметическое, среднее гармоническое, среднее геометрическое и т. д. На этом уроке обсудим только понятия среднего арифметического и среднего гармонического чисел.

К их появлению приводят две внешне похожие, но принципиально различные задачи.

Пример 6

Пешеход шел какое-то время со скоростью v_1 км/ч и такое же время – со скорость v_2 км/ч. Найдите среднюю скорость пешехода на всем пройденном им пути.

По определению средняя скорость движения – отношение всего пройденного пути ко всему затраченному на него времени.

Пусть в условии задачи пешеход шел t ч со скоростью v_1 км/ч и прошел расстояние $s_1 = v_1 \cdot t$ (км). Такое же время t ч он шел со скоростью v_2 км/ч и прошел расстояние $s_2 = v_2 \cdot t$ (км). Таким образом, пешеход прошел расстояние $s = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = (v_1 + v_2) \cdot t$ (км) за время $2t$ (ч). Тогда его средняя скорость $v_{\text{ср}} = \dfrac{(v_1 + v_2) \cdot t}{2t} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$. Величину $v_{\text{ср}} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$ называют *средним арифметическим* чисел v_1 и v_2. Потому далее такую величину будем обозначать символом $v_{\text{ср. арифм}}$.

Рассмотренную задачу легко обобщить. Если пешеход шел время t ч со скоростью v_1 км/ч, время t ч – со скоростью v_2 км/ч, ..., время t ч – со скоростью v_n км/ч, то его средняя скорость вычисляется по формуле $v_{\text{ср. арифм}} = \dfrac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}$.

По аналогии с этой задачей если имеется ряд положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то среднее арифметическое этого ряда вычисляется по формуле $a_{\text{ср. арифм}} = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

Пример 7

Пешеход прошел какое-то расстояние со скоростью v_1 км/ч и такое же расстояние – со скоростью v_2 км/ч. Найдите среднюю скорость пешехода на всем пройденном пути.

Пусть пешеход прошел расстояние s км со скоростью v_1 км/ч за время $t_1 = \dfrac{s}{v_1}$ (ч). Такое же расстояние s км он прошел со скоростью v_2 км/ч и затратил время $t_2 = \dfrac{s}{v_2}$ (ч). Таким образом, пешеход прошел расстояние $2s$ км за время $t = \dfrac{s}{v_1} + \dfrac{s}{v_2} = s\left(\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2}\right)$ (ч).

Тогда его средняя скорость $v_{ср} = 2s : s\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$. Величину $v_{ср} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$ называют ***средним гармоническим*** чисел v_1 и v_2.

Поэтому такую величину будем обозначать символом $v_{ср.\ гарм}$.

Рассмотренную задачу легко обобщить. Если пешеход прошел расстояние s км со скоростью v_1 км/ч, расстояние s км – со скоростью v_2 км/ч, ..., расстояние s км – со скоростью v_n км/ч, то его средняя скорость вычисляется по формуле $v_{ср.\ гарм} = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_n}}$.

Аналогично рассмотренной задаче если имеется ряд положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то среднее гармоническое этого ряда вычисляется по формуле $a_{ср.\ гарм} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$.

Эту формулу иногда записывают в виде

$$\frac{1}{a_{ср.\ гарм}} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}.$$

Из этого равенства видно, что величина $\frac{1}{a_{ср.\ гарм}}$, обратная среднему гармоническому нескольких положительных чисел a_1, $a_2, \ldots, a_n$, равна среднему арифметическому чисел $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ или обратных.

Естественно, возникает вопрос о сравнении среднего арифметического и среднего гармонического одних и тех же положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Можно доказать (например, методом математической индукции), что выполнено неравенство $a_{ср.\ арифм} \geq a_{ср.\ гарм}$. Причем равенство $a_{ср.\ арифм} = a_{ср.\ гарм}$, только если все рассматриваемые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны.

Пример 8

Сравним среднее арифметическое $a_{ср.\ арифм} = \frac{a_1 + a_2}{2}$ и среднее гармоническое $a_{ср.\ гарм} = \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2}$ двух положительных чисел a_1 и a_2.

Найдем и упростим разность этих величин: $a_{\text{ср. арифм}} - a_{\text{ср. гарм}} =$
$= \frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} = \frac{(a_1 + a_2)^2 - 4a_1a_2}{2(a_1 + a_2)} = \frac{(a_1 - a_2)^2}{2(a_1 + a_2)}.$

Так как числа a_1 и a_2 положительные и $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$, то разность $a_{\text{ср. арифм}} - a_{\text{ср. гарм}} \geq 0$, или $a_{\text{ср. арифм}} \geq a_{\text{ср. гарм}}$. При этом равенство становится равенством только при условии $a_1 = a_2$.

IV. Задания на уроках

№ 148 (а, б); 149 (б); 150 (б); 151 (а); 152 (а, б); 153 (а); 154 (г); 155 (б); 157; 158; 160 (б); 161 (б); 162; 163 (в); 165 (а); 166 (б); 167 (а); 170; 172.

V. Контрольные вопросы

1. Как вычисляется среднее арифметическое ряда чисел?
2. По какой формуле вычисляется среднее гармоническое ряда чисел?
3. Сравните среднее арифметическое и среднее гармоническое одних и тех же чисел.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 149 (а); 150 (а); 151 (б); 152 (в, г); 153 (б); 154 (б); 155 (а); 156 (б); 159 (а); 160 (а); 161 (а); 163 (г); 164 (б); 165 (б); 166 (а); 167 (б); 171; 173.

Уроки 21, 22. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график

Цель: рассмотреть функцию $y = \frac{k}{x}$, ее свойства и график.

Планируемые результаты: научиться строить график зависимости $y = \frac{k}{x}$ и представлять свойства этой функции.

Тип уроков: уроки-исследования.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Упростите выражение $\dfrac{\dfrac{a}{b}-1}{2-\dfrac{b+a}{a}}$.

а) $\dfrac{b}{a}$; б) $\dfrac{a}{b}$; в) $\dfrac{a-b}{b}$.

2. Найдите значение выражения

$\left(\dfrac{a^2}{a+b}-\dfrac{a^3}{a^2+b^2+2ab}\right):\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right)$ при $a=-0{,}7$, $b=0{,}3$.

а) $\dfrac{7}{3}$; б) $\dfrac{5}{4}$; в) $\dfrac{7}{4}$.

Вариант 2

1. Упростите выражение $\dfrac{\dfrac{a}{b}-3}{4-\dfrac{a+b}{b}}$.

а) -1; б) $\dfrac{a}{b}$; в) $-\dfrac{b}{a}$.

2. Найдите значение выражения

$\left(\dfrac{2a}{2a+b}-\dfrac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\dfrac{2a}{4a^2-b^2}+\dfrac{1}{b-2a}\right)$ при $a=0{,}3$, $b=0{,}8$.

а) $\dfrac{6}{35}$; б) $\dfrac{3}{35}$; в) $-\dfrac{8}{35}$.

III. Работа по теме уроков

Пример 1

Пусть поезд, двигаясь со скоростью x км/ч, за y ч проехал расстояние 700 км. Тогда выполняется равенство $xy = 700$. Выразим из этого равенства переменную $y = \dfrac{700}{x}$. При увеличении значения x в несколько раз соответствующее значение y уменьшается во столько же раз (т. е. чем быстрее движется поезд, тем меньше ему требуется времени для прохождения этого пути). Например, при скорости $x = 35$ км/ч время движения $y = \dfrac{700}{35} = 20$ (ч). При скорости $x = 70$ км/ч (вдвое большей) время движения $y = \dfrac{700}{70} = 10$ (ч) (вдвое меньше). Видно, что время движения y обратно пропорционально скорости движения.

В этом примере переменные x и y принимали только положительные значения. В дальнейшем будут рассматриваться функции, задаваемые формулой вида $y = \frac{k}{x}$ (где k – число, не равное нулю), в которой переменные x и y могут принимать и положительные, и отрицательные значения. К подобным функциям приводят многие задачи математики: площадь S прямоугольника со сторонами a и b равна $S = ab$ (откуда $b = \frac{S}{a}$), площадь S треугольника с основанием a и высотой h равна $S = \frac{ah}{2}$ (откуда $h = \frac{2S}{a}$) – и физики: пройденный путь s при движении тела со скоростью v в течение времени t равен $s = vt$ (откуда $t = \frac{s}{v}$), падение напряжения U на участке цепи с сопротивлением R при протекании тока I равно $U = RI$ (откуда $I = \frac{U}{R}$) и т. д.

Функция вида $y = \frac{k}{x}$, где x – независимая переменная; k – число, не равное нулю, называется *обратной пропорциональностью*. Областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ является множество всех чисел, кроме нуля. Это следует из того, что выражение $\frac{k}{x}$ имеет смысл при всех $x \neq 0$.

Пример 2

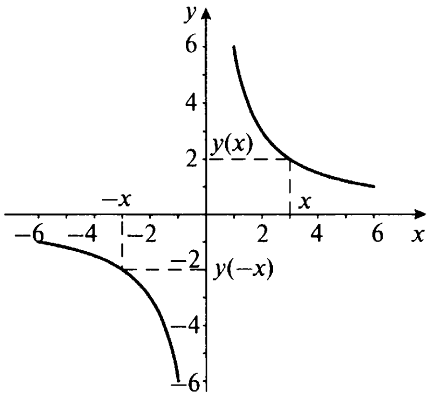
Построим график функции $y = \frac{6}{x}$, предварительно вычислив значения функции на промежутке $-6 \leq x \leq 6$ с шагом 0,5.

x	–6	–5,5	–5	–4,5	–4	–3,5	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5
y	–1	–1,09	–1,2	–1,33	–1,5	–1,71	–2	–2,4	–3	–4	–6	–12

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
y	12	6	4	3	2,4	2	1,71	1,5	1,33	1,2	1,09	1

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых размещены в таблице (отмечены не все точки). Через эти точки проведен график данной функции.

Выясним некоторые особенности графика функции. Так как при $x = 0$ функция не определена, то на графике нет точки с абсциссой O (т. е. график не пересекает ось y). Для функции $y = \frac{6}{x}$ при любых значениях x значение y не равно нулю. Поэтому график не пересекает ось x.



Положительным значениям x соответствуют положительные значения y (первая координатная четверть). Отрицательным значениям x соответствуют отрицательные значения y (третья координатная четверть). Из данных таблицы видно, что для противоположных значений x значения y также противоположны, т. е. $y(-x) = -y(x)$. Функции, обладающие таким свойством, называются *нечетными*. Очевидно, что точки с координатами (x, y) и $(-x, -y)$ симметричны относительно начала координат. Так как равенство $y(-x) = -y(x)$ выполнено для любых допустимых значений x, то ветви графика симметричны относительно начала координат.

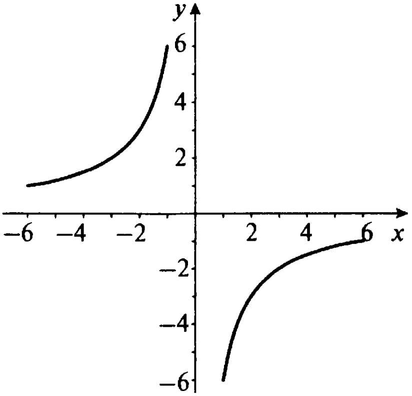
Рассмотрим ветвь графика, расположенную в первой координатной четверти. При уменьшении x знаменатель в выражении $y = \frac{6}{x}$ уменьшается. Поэтому значения y возрастают. Например, если $x = 1$, то $y = 6$, при $x = 0{,}1$ $y = 60$. При этом график функции приближается к оси ординат. Прямая с уравнением $x = 0$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = \frac{6}{x}$.

С увеличением x знаменатель в выражении $y = \frac{6}{x}$ возрастает. Поэтому значения y уменьшаются. Например, при $x = 1$ $y = 6$, при $x = 10$ $y = 0{,}6$, при $x = 100$ $y = 0{,}06$. Видно, что при достаточно больших значениях x значения функции y почти равны нулю. При этом график функции приближается к оси абсцисс. Прямая с уравнением $y = 0$ называется ***горизонтальной асимптотой*** графика функции $y = \frac{6}{x}$.

Заметим, что такой же вид имеет график любой функции $y = \frac{k}{x}$ при любом значении $k > 0$.

Пример 3

Построим график функции $y = -\frac{6}{x}$. Аналогично предыдущему примеру составим таблицу значений функции в промежутке $-6 \le x \le 6$. Отметим полученные точки на координатной плоскости и построим график функции.



Видно, что в этом случае график функции имеет те же особенности, что и в предыдущем примере. Область определения функции – множество всех чисел, не равных нулю. График не пересекает оси координат.

График имеет вертикальную асимптоту с уравнением $x = 0$ и горизонтальную асимптоту с уравнением $y = 0$. График зависимости $y = -\frac{6}{x}$ по-прежнему представляет собой кривую, состоящую из двух ветвей. Эти ветви симметричны относительно начала координат. Однако в отличие от графика функции $y = \frac{6}{x}$ в этом случае одна ветвь расположена во второй четверти, а другая ветвь – в четвертой координатной четверти.

График функции $y = \frac{k}{x}$ при любом значении $k < 0$ имеет такой же вид, что и график, изображенный на рисунке.

Кривую, являющуюся графиком обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$, называют *гиперболой*. Гипербола состоит из двух ветвей, симметричных относительно начала координат.

Пример 4

Гипербола проходит через точку $A\ (2; -5)$. Напишем уравнение этой гиперболы.

Гипербола является графиком обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$. Так как этот график проходит через точку A, то ее координаты удовлетворяют уравнению такой зависимости. Получаем: $-5 = \frac{k}{2}$. Из этого уравнения найдем $k = -5 \cdot 2 = -10$. Следовательно, данная гипербола описывается зависимостью $y = -\frac{10}{x}$.

IV. Задания на уроках

№ 179; 182; 184; 186 (а); 187 (б); 188; 190 (а); 191.

V. Контрольные вопросы

1. Какая функция называется обратной пропорциональностью?
2. Основные особенности функции.
3. Нарисуйте эскиз графика функции для случая: а) $k > 0$; б) $k < 0$. В каких четвертях располагается этот график?
4. Какая кривая называется гиперболой? Как располагаются ветви гиперболы?

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 180; 181; 185; 186 (б); 187 (а); 189; 190 (б); 192; 193.

Урок 23. Контрольная работа № 2 по теме «Рациональные дроби»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 самые простые, варианты 3, 4 сложнее и варианты 5, 6 самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую свободу выбора учащимся. При таких же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла, вариантов 5, 6 – 1 балл (т. е. оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач).

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимися (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Найдите допустимые значения переменной выражения $\frac{a-3}{a^2+6a}$ и определите, при каком значении переменной данная рациональная дробь равна нулю.

2. Сократите дробь $\frac{6y-3x}{x^2-4y^2}$ и найдите ее значение при $x = 0{,}2$ и $y = 0{,}4$.

3. Выполните действия: $\left(2+\frac{a}{a+1}\right):\frac{12a+8}{3a^2+3a}$.

4. Известно, что $\frac{a}{b} = 3$. Найдите значение дроби $\frac{2a+3b}{3a+2b}$.

5. При каких целых значениях n выражение $A = \frac{2n^2+3n+5}{n}$ также будет целым числом? Найдите это число.

6. Постройте график функции $y = \frac{x-3}{x^2-3x}$. При каких значениях аргумента значения функции отрицательны?

Вариант 2

1. Найдите допустимые значения переменной выражения $\frac{4+a}{a^2-3a}$ и определите, при каком значении переменной данная рациональная дробь равна нулю.

2. Сократите дробь $\frac{8y+4x}{x^2-4y^2}$ и найдите ее значение при $x = 0{,}3$ и $y = -0{,}35$.

3. Выполните действия: $\left(\frac{2a}{2a-1}+1\right):\frac{4a^2-a}{6a-3}$.

4. Известно, что $\frac{a}{b} = 2$. Найдите значение дроби $\frac{4a+3b}{3a+4b}$.

5. При каких целых значениях n выражение $A = \frac{3n^2-2n+3}{n}$ также будет целым числом? Найдите это число.

6. Постройте график функции $y = \dfrac{x+2}{x^2+2x}$. При каких значениях аргумента значения функции положительны?

Вариант 3

1. Найдите допустимые значения переменной выражения $\dfrac{a^2-2a}{a^2-a-2}$ и определите, при каких значениях переменных данная рациональная дробь равна нулю.

2. Сократите дробь $\dfrac{ax-ay-bx+by}{ax-bx+2ay-2by}$ и найдите ее значение при $x = 1{,}2$ и $y = -0{,}1$.

3. Упростите выражение $\left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}\right) : \dfrac{ab}{a^2-b^2}$.

4. Известно, что $\dfrac{2a-b}{a+b} = 1$. Найдите значение дроби $\dfrac{3a-4b}{a+2b}$.

5. При каких целых значениях n выражение $A = \dfrac{n^2+n+3}{n+2}$ также будет целым числом? Найдите это число.

6. Постройте график функции $y = \dfrac{(x+2)^2-(x-2)^2}{2x^2}$. При каких значениях аргумента значения функции неположительны?

Вариант 4

1. Найдите допустимые значения переменной выражения $\dfrac{a^2+3a}{a^2+2a-3}$ и определите, при каких значениях переменных данная рациональная дробь равна нулю.

2. Сократите дробь $\dfrac{ax-2ay+bx-2by}{ax+bx+ay+by}$ и найдите ее значение при $x = 1{,}3$ и $y = -0{,}3$.

3. Упростите выражение $\left(\dfrac{a-b}{a+b} - \dfrac{a+b}{a-b}\right) : \dfrac{b^2}{a^2-b^2}$.

4. Известно, что $\dfrac{3a-5b}{a-b} = 1$. Найдите значение дроби $\dfrac{2a-3b}{2a+b}$.

5. При каких целых значениях n выражение $A = \dfrac{n^2+2n+2}{n+3}$ также будет целым числом? Найдите это число.

6. Постройте график функции $y = \dfrac{(x-3)^2-(x+3)^2}{6x^2}$. При каких значениях аргумента значения функции неположительны?

Вариант 5

1. Найдите допустимые значения переменной выражения $\dfrac{a^3-4a}{a^2-a-2}$ и определите, при каких значениях переменных данная рациональная дробь равна нулю.

2. Сократите дробь $\dfrac{a^2-ac+b^2+2ab-bc}{ab+ac+b^2-c^2}$.

3. Упростите выражение

$$\left(\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}-\frac{2b^2}{b^2-a^2}\right)\cdot\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2}.$$

4. Известно, что $\dfrac{3a+b}{a+2b}=2$. Найдите значение дроби $\dfrac{2a^2-ab+b^2}{3a^2-2ab+b^2}$.

5. Найдите целочисленные решения уравнения $xy+3x-2y=9$.

6. Постройте график функции $y=\dfrac{18-12x}{x^2-3x}-\dfrac{6}{3-x}$.

Вариант 6

1. Найдите допустимые значения переменной выражения $\dfrac{a^3-9a}{a^2+2a-3}$ и определите, при каких значениях переменных данная рациональная дробь равна нулю.

2. Сократите дробь $\dfrac{a^2+ac+b^2-2ab-bc}{ab+2bc-ac-b^2-c^2}$.

3. Упростите выражение $\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b^2+a^2}{b^2-a^2}-\dfrac{a}{a-b}\right):\dfrac{a+b}{2}$.

4. Известно, что $\dfrac{a+4b}{2a-b}=2$. Найдите значение дроби $\dfrac{a^2-2ab+3b^2}{2a^2+ab+b^2}$.

5. Найдите целочисленные решения уравнения $xy+3y-x=6$.

6. Постройте график функции $y=\dfrac{6}{x+2}-\dfrac{2x-8}{x^2+2x}$.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ (число решивших задачу правильно или почти правильно);

± (число решивших задачу со значительными погрешностями);

– (число не решивших задачу);

∅ (число не решавших задачу).

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими их).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям и разобрать наиболее трудные варианты).

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. Любые a, кроме $a = 0$ и $a = -6$; $a = 3$.

2. $-\dfrac{3}{x+2y}$; -3.

3. $\dfrac{3}{4}a$ (при $a \neq 0$, $a \neq -1$, $a \neq -\dfrac{2}{3}$).

4. $\dfrac{9}{11}$.

5. При $n = 1$ $A = 10$, при $n = -1$ $A = -4$, при $n = 5$ $A = 14$, при $n = -5$ $A = -8$.

6. График $y = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 3)$; $x < 0$.

Вариант 2

1. Любые a, кроме $a = 0$ и $a = 3$; $a = -4$.

2. $\dfrac{4}{x-2y}$; 4.

3. $\dfrac{3}{a}$ (при $a \neq 0$, $a \neq 2$, $a \neq \dfrac{1}{2}$, $a \neq \dfrac{1}{4}$).

4. $\dfrac{11}{10}$.

5. При $n = 1$ $A = 4$, при $n = -1$ $A = -8$, при $n = 3$ $A = 8$, при $n = -3$ $A = -12$.

6. График $y = \frac{1}{x}$ $(x \neq -2)$; $x > 0$.

Вариант 3

1. Любые a, кроме $a = 2$ и $a = -1$; $a = 0$.

2. $\frac{x-y}{x+2y}$; 1,3.

3. 4 (при a, $b \neq 0$, $a \neq \pm b$).

4. $\frac{1}{2}$.

5. При $n = -1$ $A = 3$, при $n = -3$ $A = -9$, при $n = 3$ $A = 3$, при $n = -7$ $A = -9$.

6. График $y = \frac{4}{x}$; $x < 0$.

Вариант 4

1. Любые a, кроме $a = -3$ и $a = 1$; $a = 0$.

2. $\frac{x-2y}{x+y}$; 1,9.

3. $-4\frac{a}{b}$ (при $b \neq 0$, $a \neq \pm b$).

4. $\frac{1}{5}$.

5. При $n = -2$ $A = 2$, при $n = -4$ $A = -10$, при $n = 2$ $A = 2$, при $n = -8$ $A = -10$.

6. График $y = -\frac{2}{x}$; $x > 0$.

Вариант 5

1. Разложим числитель дроби на множители, используя формулу разности квадратов. При разложении знаменателя используем способ группировки: $a^2 - a - 2 = a^2 - 2a + a - 2 = (a^2 - 2a) + (a - 2) = a(a - 2) + (a - 2) = (a - 2)(a + 1)$. Запишем дробь в виде $\frac{a^3 - 4a}{a^2 - a - 2} = \frac{a(a^2 - 4)}{(a-2)(a+1)} = \frac{a(a-2)(a+2)}{(a-2)(a+1)}$. Дробь имеет смысл, если ее знаменатель не равен нулю. Из условия $(a - 2)(a + 1) \neq 0$ находим, что $a \neq 2$ и $a \neq -1$, поэтому допустимые значения переменной a для данного выражения – любые значения a, кроме $a = 2$ и $a = -1$.

Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель при этом в нуль не обращается. Числитель $a(a - 2)(a + 2) = 0$ при $a = 0$, $a = 2$ (но при этом значении a и знаменатель равен нулю) и $a = -2$.

Ответ: любые a, кроме $a = 2$ и $a = -1$; $a = 0$ и $a = -2$.

2. Используя способ группировки и формулу разности квадратов, разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее. Получаем

$$\frac{a^2 - ac + b^2 + 2ab - bc}{ab + ac + b^2 - c^2} = \frac{\left(a^2 + 2ab + b^2\right) - (ac + bc)}{(ab + ac) + \left(b^2 - c^2\right)} =$$

$$= \frac{(a+b)^2 - c(a+b)}{a(b+c) + (b+c)(b-c)} = \frac{(a+b)(a+b-c)}{(b+c)(a+b-c)} = \frac{a+b}{b+c}.$$

Ответ: $\frac{a+b}{b+c}$.

3. Используя правила действий с дробями, упростим выражение. Имеем

$$\left(\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b} - \frac{2b^2}{b^2 - a^2}\right) \cdot \frac{a-b}{a^2 + 2ab + b^2} = \left(\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b} +\right.$$

$$\left.+\frac{2b^2}{(a-b)(a+b)}\right) \cdot \frac{a-b}{(a+b)^2} = \frac{a(a+b) - a(a-b) + 2b^2}{(a-b)(a+b)} \cdot \frac{a-b}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{a^2 + ab - a^2 + ab + 2b^2}{(a-b)(a+b)} \cdot \frac{a-b}{(a+b)^2} = \frac{2b(a+b)}{(a-b)(a+b)} \cdot \frac{a-b}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{2b(a-b)}{(a-b)(a+b)^2} = \frac{2b}{(a+b)^2}.$$

Ответ: $\frac{2b}{(a+b)^2}$.

4. Из выражения $\frac{3a+b}{a+2b} = 2$ получим $3a + b = 2(a + 2b)$, или $3a + b = 2a + 4b$, или $a = 3b$. Теперь подставим это соотношение и найдем значение данной дроби:

$$\frac{2a^2 - ab + b^2}{3a^2 - 2ab + b^2} = \frac{2 \cdot (3b)^2 - 3b \cdot b + b^2}{3 \cdot (3b)^2 - 2 \cdot 3b \cdot b + b^2} = \frac{18b^2 - 3b^2 + b^2}{27b^2 - 6b^2 + b^2} =$$

$$= \frac{16b^2}{22b^2} = \frac{8}{11}.$$

Ответ: $\frac{8}{11}$.

5. Из выражения $xy + 3x - 2y = 9$ выразим, например, переменную x. Получаем $x(y + 3) = 2y + 9$, откуда $x = \frac{2y+9}{y+3} =$

$= \dfrac{(2y+6)+3}{y+3} = \dfrac{2(y+3)+3}{y+3} = 2 + \dfrac{3}{y+3}$. По условию x и y должны быть целыми числами. Это возможно, только если дробь $\dfrac{3}{y+3}$ будет целым числом. Для этого $y + 3$ должно быть делителем числа 3 (т. е. равняться ±1, ±3). Поэтому имеем

а) при $y + 3 = 1$ (т. е. при $y = -2$) $x = 2 + \dfrac{3}{1} = 5$;

б) при $y + 3 = -1$ (т. е. при $y = -4$) $x = 2 + \dfrac{3}{-1} = -1$;

в) при $y + 3 = 3$ (т. е. при $y = 0$) $x = 2 + \dfrac{3}{3} = 3$;

г) при $y + 3 = -3$ (т. е. при $y = -6$) $x = 2 + \dfrac{3}{-3} = 1$.

Ответ: (5; –2); (–1; –4); (3; 0); (1; –6).

6. Преобразуем данную функцию: $y = \dfrac{18-12x}{x^2-3x} - \dfrac{6}{3-x} = \dfrac{18-12x}{x(x-3)} + \dfrac{6}{x-3} = \dfrac{18-12x+6x}{x(x-3)} = \dfrac{18-6x}{x(x-3)} = \dfrac{-6(x-3)}{x(x-3)} = -\dfrac{6}{x}$. Учтем область определения функции: $x(x - 3) \neq 0$, т. е. $x \neq 0$ и $x \neq 3$. Теперь построим график функции $y = -\dfrac{6}{x}$ и исключим из него точку с абсциссой $x = 3$.

Ответ: гипербола $y = -\dfrac{6}{x}$, и $x \neq 3$.

Вариант 6

1. Разложим числитель дроби на множители, используя формулу разности квадратов. При разложении знаменателя используем способ группировки: $a^2 + 2a - 3 = a^2 + 3a - a - 3 = (a^2 + 3a) - (a + 3) = a(a + 3) - (a + 3) = (a + 3)(a - 1)$. Запишем дробь в виде $\dfrac{a^3-9a}{a^2+2a-3} = \dfrac{a(a^2-9)}{(a+3)(a-1)} = \dfrac{a(a-3)(a+3)}{(a+3)(a-1)}$. Дробь имеет смысл, если ее знаменатель не равен нулю. Из условия $(a + 3)(a - 1) \neq 0$ находим, что $a \neq -3$ и $a \neq 1$, поэтому допустимые значения переменной a для данного выражения – любые значения a, кроме $a = -3$ и $a = 1$.

Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель при этом в нуль не обращается. Числитель $a(a - 3)(a + 3) = 0$ при $a = 0$, $a = 3$ и $a = -3$ (но при этом значении a и знаменатель равен нулю).

Ответ: любые a, кроме $a = -3$ и $a = 1$; $a = 0$ и $a = 3$.

2. Используя способ группировки и формулу квадрата разности, разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее. Получаем

$$\frac{a^2+ac+b^2-2ab-bc}{ab+2bc-ac-b^2-c^2}=\frac{\left(a^2-2ab+b^2\right)+(ac-bc)}{(ab-ac)-\left(b^2-2bc+c^2\right)}=$$

$$=\frac{(a-b)^2+c(a-b)}{a(b-c)-(b-c)^2}=\frac{(a-b)(a-b+c)}{(b-c)(a-b+c)}=\frac{a-b}{b-c}.$$

Ответ: $\frac{a-b}{b-c}$.

3. Используя правила действий с дробями, упростим выражение. Имеем

$$\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}-\frac{a}{a-b}\right):\frac{a+b}{2}=\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}-\right.$$

$$\left.-\frac{a}{a-b}\right)\cdot\frac{2}{a+b}=\frac{a(a-b)-a^2-b^2-a(a+b)}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{2}{a+b}=$$

$$=\frac{a^2-ab-a^2-b^2-a^2-ab}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{2}{a+b}=\frac{-a^2-2ab-b^2}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{2}{a+b}=$$

$$=\frac{-(a+b)^2}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{2}{a+b}=\frac{-(a+b)}{a-b}\cdot\frac{2}{a+b}=\frac{-(a+b)\cdot 2}{(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{-2}{a-b}=\frac{2}{b-a}.$$

Ответ: $\frac{2}{b-a}$.

4. Из выражения $\frac{a+4b}{2a-b}=2$ получим $a+4b=2(2a-b)$, или $a+4b=4a-2b$, или $6b=3a$, или $a=2b$. Теперь подставим это соотношение и найдем значение данной дроби: $\frac{a^2-2ab+3b^2}{2a^2+ab+b^2}=$

$$=\frac{(2b)^2-2\cdot 2b\cdot b+3b^2}{2\cdot(2b)^2+2b\cdot b+b^2}=\frac{4b^2-4b^2+3b^2}{8b^2+2b^2+b^2}=\frac{3b^2}{11b^2}=\frac{3}{11}.$$

Ответ: $\frac{3}{11}$.

5. Из уравнения $xy+3y-x=6$ выразим, например, переменную x. Получаем: $x(y-1)=-3y+6$, откуда $x=\frac{-3y+6}{y-1}=$

$= \dfrac{(-3y+3)+3}{y-1} = \dfrac{-3(y-1)+3}{y-1} = -3 + \dfrac{3}{y-1}$. По условию x и y должны быть целыми числами. Это возможно, только если дробь $\dfrac{3}{y-1}$ будет целым числом. Для этого $y - 1$ должно быть делителем числа 3 (т. е. равняться ±1, ±3). Поэтому имеем

а) при $y - 1 = 1$ (т. е. при $y = 2$) $x = -3 + \dfrac{3}{1} = 0$;

б) при $y - 1 = -1$ (т. е. при $y = 0$) $x = -3 + \dfrac{3}{-1} = -6$;

в) при $y - 1 = 3$ (т. е. при $y = 4$) $x = -3 + \dfrac{3}{3} = -2$;

г) при $y - 1 = -3$ (т. е. при $y = -2$) $x = -3 + \dfrac{3}{-3} = -4$.

Ответ: (0; 2); (–6; 0); (–2; 4); (–4; –2).

6. Преобразуем данную функцию: $y = \dfrac{6}{x+2} - \dfrac{2x-8}{x^2+2x} = \dfrac{6x-2x+8}{x(x+2)} = \dfrac{4x+8}{x(x+2)} = \dfrac{4(x+2)}{x(x+2)} = \dfrac{4}{x}$. Учтем область определения функции: $x(x+2) \neq 0$, т. е. $x \neq 0$ и $x \neq -2$. Теперь построим график функции $y = \dfrac{4}{x}$ и исключим из него точку с абсциссой $x = -2$.

Ответ: гипербола $y = \dfrac{4}{x}$, и $x \neq -2$.

VI. Подведение итогов урока

Факультативный урок. Метод неопределенных коэффициентов

Цель: обсудить метод неопределенных коэффициентов.

Планируемые результаты: научиться применять метод неопределенных коэффициентов для решения задач.

Тип урока: урок-лекция.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

План урока

1. Метод неопределенных коэффициентов.
2. Применение метода неопределенных коэффициентов для решения задач на рациональные дроби.

1. Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод используется в тех случаях, когда структура ответа (с точностью до некоторых коэффициентов) известна по смыслу задачи. Сами коэффициенты определяются из условия задачи.

Пример 1

Напишем уравнение прямой, график которой проходит через точки A $(-1;\ 8)$ и B $(3;\ -4)$.

Уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$. При этом коэффициенты k и b неизвестны. Для их нахождения используем условие задачи: прямая проходит через точки A и B. Поэтому координаты этих точек удовлетворяют уравнению прямой. Получаем для точки A: $8 = k \cdot (-1) + b$, для точки B: $-4 = k \cdot 3 + b$.

Таким образом, для определения коэффициентов k и b получим систему двух линейных уравнений: $\begin{cases} -k + b = 8, \\ 3k + b = -4. \end{cases}$ Решив эту систему, найдем $k = -3$ и $b = 5$. Следовательно, уравнение данной прямой $y = -3x + 5$.

Пример 2

Дана система уравнений $\begin{cases} 3x + 6y - 3z = 7, \\ x + 3y - 3z = -8. \end{cases}$ Пусть $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – решение этой системы. Найдите сумму $x_0 + y_0 + z_0$.

Очевидно, что такая система уравнений имеет бесконечное множество решений и тройка чисел $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ только одно из них. При подстановке этих чисел уравнения системы обращаются в верные числовые равенства: $\begin{cases} 3x_0 + 6y_0 - 3z_0 = 7, \\ x_0 + 3y_0 - 3z_0 = -8. \end{cases}$ Умножим первое равенство на число a, второе равенство – на число b. Получим: $\begin{cases} 3ax_0 + 6ay_0 - 3az_0 = 7a, \\ bx_0 + 3by_0 - 3bz_0 = -8b. \end{cases}$ Сложим эти равенства: $(3a + b)x_0 + (6a + 3b)y_0 + (-3a - 3b)z_0 = 7a - 8b$.

Чтобы можно было найти сумму $x_0 + y_0 + z_0$, надо в полученном выражении иметь одинаковые коэффициенты при переменных x_0, y_0, z_0, т. е. $3a + b = 6a + 3b = -3a - 3b$. Представим это равенство в виде системы уравнений: $\begin{cases} 3a + b = 6a + 3b, \\ 6a + 3b = -3a - 3b, \end{cases}$ или $\begin{cases} -2b = 3a, \\ 9a = -6b. \end{cases}$ Видно, что уравнения системы одинаковы: $3a = -2b$. Такому равенству удовлетворяют, например, числа $a = 2$, $b = -3$. То есть если первое уравнение данной системы умножить на число 2, а второе – на число (–3) и сложить полученные уравнения, то коэффициенты при неизвестных x_0, y_0, z_0 станут одинаковыми.

Теперь для решения задачи подставим числа $a = 2$ и $b = -3$ в найденное равенство: $(3a + b)x_0 + (6a + 3b)y_0 + (-3a - 3b)z_0 = 7a - 8b$ – и получим $3x_0 + 3y_0 + 3z_0 = 38$. Тогда сумма неизвестных $x_0 + y_0 + z_0 = \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}$. Таким образом, используя метод неопределенных коэффициентов, не находя сами неизвестные x_0, y_0, z_0, удается найти их сумму.

Пример 3

Известно, что сумма трех чисел равна 1. Докажите, что сумма квадратов этих чисел не меньше $\frac{1}{3}$.

Пусть эти числа a, b и c и для них выполнено равенство $a + b + c = 1$. Надо доказать, что тогда справедливо неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{1}{3}$.

Сначала рассмотрим самый простой случай $a = b = c = \frac{1}{3}$ (тогда выполнено равенство $a + b + c = 1$). Найдем величину $a^2 + b^2 + c^2 = (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3}$ (что и требовалось доказать).

Все остальные случаи свяжем с рассмотренным. Пусть $a = \frac{1}{3} + x$, $b = \frac{1}{3} + y$, $c = \frac{1}{3} + z$ (где x, y, z – некоторые числа). Для того чтобы выполнялось условие задачи $a + b + c = 1$, надо потребовать выполнения равенства $x + y + z = 0$.

Найдем величину $a^2 + b^2 + c^2 = (\frac{1}{3} + x)^2 + (\frac{1}{3} + y)^2 + (\frac{1}{3} + z)^2 =$

$$= (\frac{1}{9} + \frac{2}{3}x + x^2) + (\frac{1}{9} + \frac{2}{3}y + y^2) + (\frac{1}{9} + \frac{2}{3}z + z^2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x + y + z) +$$

$$+ (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{3} + (x^2 + y^2 + z^2).$$

Очевидно, что $x^2 + y^2 + z^2 \ge 0$ при любых значениях x, y, z. При этом равенство $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ выполняется только в случае $x = y = z = 0$ (первый рассмотренный нами случай).

Таким образом, неравенство было доказано, хотя числа x, y, z найти невозможно.

Пример 4

Представьте многочлен $x^3 + 6x^2 + 3x + 2$ в виде выражения $(x + 2)(x^2 + ax + b) + c$ (другими словами, найдите частное и остаток от деления многочлена $x^3 + 6x^2 + 3x + 2$ на $x + 2$).

По условию задачи должно выполняться равенство $x^3 + 6x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x^2 + ax + b) + c$. В правой части этого тождества раскроем скобки и приведем подобные члены: $x^3 + 6x^2 + 3x + 2 = x^3 + ax^2 + bx + 2x^2 + 2ax + 2b + c$ или $x^3 + 6x^2 + 3x + 2 = x^3 + (a + 2)x^2 + (b + 2a)x + (2b + c)$. Такое равенство должно выполняться при всех значениях x. Поэтому коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства должны быть равны.

Получаем систему уравнений $\begin{cases} 6 = a + 2, \\ 3 = b + 2a, \\ 2 = 2b + c, \end{cases}$ решение которой $a = 4$, $b = -5$ и $c = 12$.

Таким образом, $x^3 + 6x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x^2 + 4x - 5) + 12$. Другими словами, при делении многочлена $x^3 + 6x^2 + 3x + 2$ на двучлен $x + 2$ получаем в частном квадратный трехчлен $x^2 + 4x - 5$ и в остатке – число 12.

Из рассмотренных примеров видно, что метод неопределенных коэффициентов можно использовать для решения самых разнообразных задач, в том числе и задач на рациональные дроби.

2. Применение метода неопределенных коэффициентов для решения задач на рациональные дроби

Аналогичный подход используется и при решении задач на рациональные дроби.

Пример 5

При каких целых значениях x дробь $A = \dfrac{x^3 + 6x^2 + 10x + 5}{x + 3}$ также принимает целые значения?

В дроби A выделим целую и дробную части. Целая часть при этом представляет собой квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$, дробная часть имеет вид $\dfrac{c}{x + 3}$, т. е. $A = x^2 + ax + b + \dfrac{c}{x + 3}$. Приведем выражения к общему знаменателю $x + 3$ и получим

$$A = \frac{x^3 + ax^2 + bx + 3x^2 + 3ax + 3b + c}{x + 3} =$$

$$= \frac{x^3 + (a + 3)x^2 + (b + 3a)x + (3b + c)}{x + 3}.$$

Дроби

$$A = \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 5}{x + 3} \text{ и } A = \frac{x^3 + (a + 3)x^2 + (b + 3a)x + (3b + c)}{x + 3}$$

тождественно равны и имеют одинаковые знаменатели. Поэтому числители дробей также должны быть тождественно равны и в них одинаковые степени переменной x будут иметь равные коэффициенты, т. е. $\begin{cases} 6 = a + 3, \\ 10 = b + 3a, \\ 5 = 3b + c. \end{cases}$ Решение этой системы линейных уравнений $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$.

Таким образом, дробь имеет вид $A = x^2 + 3x + 1 + \dfrac{2}{x+3}$. При целых значениях x выражение $x^2 + 3x + 1$ принимает также целые значения. Дробь $\dfrac{2}{x+3}$ будет целым числом, если значение выражения $x + 3$ будет делителем числа 2. Возможны четыре случая: $x + 3 = 1$ (тогда $x = -2$), $x + 3 = 2$ (откуда $x = -1$), $x + 3 = -1$ (тогда $x = -4$) и $x + 3 = -2$ (откуда $x = -5$).

Итак, при $x = -2; -1; -4; -5$ дробь A будет принимать целые значения.

Пример 6

Найдем сумму дробей $S = \dfrac{2}{3 \cdot 5} + \dfrac{2}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{2}{99 \cdot 101}$.

Любой член этой суммы имеет вид $a_n = \dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots, 49$. Представим дробь a_n в виде суммы дробей со знаменателями $2n + 1$ и $2n + 3$, т. е. $a_n = \dfrac{a}{2n+1} + \dfrac{b}{2n+3}$ (где a и b – некоторые числа). В выражении a_n приведем дроби к общему знаменателю: $a_n = \dfrac{2an + 3a + 2bn + b}{(2n+1)(2n+3)} = \dfrac{(2a+2b)n + (3a+b)}{(2n+1)(2n+3)}$. Дроби $\dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)}$ и $\dfrac{(2a+2b)n + (3a+b)}{(2n+1)(2n+3)}$ тождественно равны при всех натуральных n. Это возможно только при выполнении двух условий: $\begin{cases} 2a + 2b = 0, \\ 3a + b = 2. \end{cases}$ Такая система уравнений имеет решение $a = 1$ и $b = -1$.

Итак, $\dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3}$. Запишем это равенство для $n = 1, 2, 3, \ldots, 49$:

при $n = 1$: $\dfrac{2}{3 \cdot 5} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}$;

при $n = 2$: $\dfrac{2}{5 \cdot 7} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7}$;

при $n = 3$: $\frac{2}{7 \cdot 9} = \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$;

...

при $n = 48$: $\frac{2}{97 \cdot 99} = \frac{1}{97} - \frac{1}{99}$;

при $n = 49$: $\frac{2}{99 \cdot 101} = \frac{1}{99} - \frac{1}{101}$.

Почленно сложим эти равенства. Легко видеть, что дроби, расположенные по диагонали, сокращаются и в правой части остается только разность $\frac{1}{3} - \frac{1}{101}$. Левая часть равна рассматриваемой сумме дробей $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{101} = \frac{98}{303}$.

Обсудим аналогичную (но более сложную) задачу.

***Пример** 7*

Упростим выражение

$$S = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \ldots + \\ + \frac{1}{(x+99)(x+100)}.$$

Любая дробь в выражении S имеет вид $a_n = \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots, 99$. Представим дробь a_n в виде суммы дробей со знаменателями $x + n$ и $x + n + 1$, т. е. $a_n = \frac{a}{x+n} + \frac{b}{x+n+1} = \frac{a(x+n+1) + b(x+n)}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{(a+b)(x+n)+a}{(x+n)(x+n+1)}$.

Дроби $\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ и $\frac{(a+b)(x+n)+a}{(x+n)(x+n+1)}$ равны при всех допустимых значениях переменных x и n. Это возможно при выполнении условий $\begin{cases} a + b = 0, \\ a = 1, \end{cases}$ откуда $a = 1$ и $b = -1$. Получили $\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}$. Запишем это тождество для $n = 0, 1, 2, \ldots, 99$ и сложим полученные равенства (как в предыдущей задаче). Тогда находим $S = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+100} = \frac{100}{x(x+100)}$.

III. Задания на уроке и на дом

1. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точки: а) A (–1; –5) и B (4; 5); б) A (–2; 7) и B (3; –8).

Ответы: а) $y = 2x - 3$; б) $y = -3x + 1$.

2. График функции $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки A, B и C. Напишите уравнение функции: а) $A(-1; 6)$, $B(0; 1)$, $C(2; 9)$; б) $A(-1; 4)$, $B(0; 7)$, $C(3; -8)$.

Ответы: а) $y = 3x^2 - 2x + 1$; б) $y = -2x^2 + x + 7$.

3. Пусть $(x_0; y_0; z_0)$ – решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + y + 2z = 3, \\ 2x + 6y + 4z = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y + z = 1, \\ 2x - 4y - z = 3. \end{cases}$

Найдите сумму $x_0 + y_0 + z_0$.

Ответы: а) $\frac{11}{8}$; б) $-\frac{3}{5}$.

4. Найдите частное и остаток от деления многочлена $M(x)$ на многочлен $N(x)$:

а) $M(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 7$, $N(x) = x - 1$;

б) $M(x) = 5x^3 - 7x^2 + 2x - 3$, $N(x) = x + 2$;

в) $M(x) = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$, $N(x) = x^2 - x + 1$;

г) $M(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$, $N(x) = x^2 + x - 2$;

Ответы: а) $3x^2 + x + 2$ и 9; б) $5x^2 - 17x + 36$ и -75; в) $x + 4$ и $-3x - 3$; г) $x - 3$ и $10x - 3$.

5. При каких целых значениях x дробь A также принимает целые значения?

а) $A = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x + 1}{x - 1}$; б) $A = \dfrac{3x^3 + 7x^2 + x + 1}{x + 2}$.

Ответы: а) -1; 0; 2; 3; б) -5; -3; -1; 1.

6. Найдите сумму дробей:

а) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{99 \cdot 100}$;

б) $\dfrac{1}{2 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 6} + \dfrac{1}{6 \cdot 8} + \ldots + \dfrac{1}{98 \cdot 100}$;

в) $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \dfrac{1}{97 \cdot 100}$;

г) $\dfrac{1}{2 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 8} + \dfrac{1}{8 \cdot 11} + \ldots + \dfrac{1}{98 \cdot 101}$.

Ответы: а) $\frac{99}{100}$; б) $\frac{49}{200}$; в) $\frac{33}{100}$; г) $\frac{33}{202}$.

7. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1}{x(x+2)} + \dfrac{1}{(x+2)(x+4)} + \dfrac{1}{(x+4)(x+6)} + \ldots + \dfrac{1}{(x+98)(x+100)}$;

б) $\dfrac{1}{x(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+6)}+\dfrac{1}{(x+6)(x+9)}+\ldots+\dfrac{1}{(x+96)(x+99)}$.

Ответы: а) $\dfrac{50}{x(x+100)}$; б) $\dfrac{33}{x(x+99)}$.

IV. Подведение итогов урока

Факультативный урок. Задачи на рациональные дроби

Цель: рассмотреть более сложные задачи, связанные с рациональными дробями.

Планируемые результаты: научить решать сложные задачи на рациональные дроби.

Тип урока: урок-исследование.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

С рациональными дробями связано значительное число самых разнообразных задач.

Пример 1

Найдите допустимые значения переменной дробного выражения $\dfrac{3-\dfrac{x}{x+2}}{5+\dfrac{x+1}{x+3}}$. Представьте это выражение в виде дроби.

Числитель этого выражения $3-\dfrac{x}{x+2}$ имеет смысл при всех значениях x, кроме $x=-2$ (так как делить на нуль нельзя). Упростим это выражение: $3-\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{3}{1}-\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{3(x+2)-x}{x+2}=\dfrac{3x+6-x}{x+2}=$ $=\dfrac{2x+6}{x+2}=\dfrac{2(x+3)}{x+2}$. Знаменатель этого выражения $5+\dfrac{x+1}{x+3}$ имеет смысл при всех значениях x, кроме $x=-3$. Преобразуем это выражение: $5+\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{5}{1}+\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{5(x+3)+x+1}{x+3}=\dfrac{5x+15+x+1}{x+3}=$ $=\dfrac{6x+16}{x+3}=\dfrac{2(3x+8)}{x+3}$. Эта дробь обращается в нуль, если ее числитель $2(3x+8)=0$. Из этого уравнения найдем $x=-\dfrac{8}{3}$.

Теперь разделим числитель $\frac{2(x+3)}{x+2}$ данного выражения на знаменатель $\frac{2(3x+8)}{x+3}$, используя правило деления дробей. Имеем $\frac{2(x+3)}{x+2}:\frac{2(3x+8)}{x+3}=\frac{2(x+3)}{x+2}\cdot\frac{x+3}{2(3x+8)}=\frac{(x+3)^2}{(x+2)(3x+8)}=$ $=\frac{x^2+6x+9}{3x^2+8x+6x+16}=\frac{x^2+6x+9}{3x^2+14x+16}$. Итак, данное выражение имеет смысл при всех значениях x таких, что $x\neq-2$, $x\neq-3$ и $x\neq-\frac{8}{3}$. После преобразований данное выражение записано в виде рациональной дроби $\frac{x^2+6x+9}{3x^2+14x+16}$.

Пример 2

Известно, что $\frac{4b+a}{b+a}=3$. Найдите величину $\frac{2a^2-ab+3b^2}{3a^2+5b^2}$.

По определению частного из равенства $\frac{4b+a}{b+a}=3$ получаем $4b+a=3(b+a)$ или $4b+a=3b+3a$, откуда $b=2a$. Имеем $\frac{2a^2-a\cdot 2a+3\cdot(2a)^2}{3a^2+5\cdot(2a)^2}=\frac{2a^2-2a^2+12a^2}{3a^2+20a^2}=\frac{12a^2}{23a^2}=\frac{12}{23}$.

Пример 3

Известно, что $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Докажите, что $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

Обозначим отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ буквой x. Из равенства $\frac{a}{b}=x$ получим $a=bx$, из равенства $\frac{c}{d}=x$ имеем $c=dx$. Найдем отношение $\frac{a+b}{a-b}=\frac{bx+b}{bx-b}=\frac{b(x+1)}{b(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}$ и отношение $\frac{c+d}{c-d}=\frac{dx+d}{dx-d}=\frac{d(x+1)}{d(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}$. Сравнивая полученные отношения (равные одной и той же дроби $\frac{x+1}{x-1}$), видим, что $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

Пример 4

При каких натуральных значениях n выражение $\frac{2n-5}{n+2}$ является целым числом?

В дроби $\frac{2n-5}{n+2}$ выделим целое выражение. Для этого в числителе дроби надо выделить слагаемое, пропорциональное знаменателю: $2n - 5 = (2n + 4) - 9 = 2(n + 2) - 9$. Тогда, учитывая правило вычитания дробей, можем записать: $\frac{2n-5}{n+2} = \frac{2(n+2)-9}{n+2} = \frac{2(x+2)}{n+2} - \frac{9}{n+2} = 2 - \frac{9}{n+2}$. Число 2 является целым. Поэтому, чтобы данная дробь была целым числом, надо, чтобы дробь $\frac{9}{n+2}$ являлась целым числом. Это возможно только в том случае, если натуральное число $n + 2$ будет делителем числа 9. Число 9 имеет три натуральных делителя: 1, 3 и 9.

Рассмотрим эти случаи. При $n + 2 = 1$ получаем $n = -1$ (число отрицательное), что противоречит условию задачи. Для $n + 2 = 3$ находим $n = 1$. При $n + 2 = 9$ имеем $n = 7$. Итак, только при натуральных значениях $n = 1$ и $n = 7$ дробь $\frac{2n-5}{n+2}$ является целым числом. Убедимся в этом. Для $n = 1$ данная дробь равна $\frac{2\cdot 1-5}{1+2} = \frac{-3}{3} = -1$ (целое число), при $n = 7$ дробь равна $\frac{2\cdot 7-5}{7+2} = \frac{9}{9} = 1$ (также целое число).

Можно было использовать и метод неопределенных коэффициентов.

Пример 5

Найдите целую и дробную части в выражении $\frac{3x^3+2x^2-4x+3}{x-1}$.

Аналогично предыдущей задаче в числителе дроби надо выделить слагаемые, пропорциональные знаменателю, сгруппировав его члены. Получаем: $3x^3 + 2x^2 - 4x + 3 = (3x^3 - 3x^2) + 3x^2 + 2x^2 - 4x + 3 = 3x^2(x - 1) + 5x^2 - 4x + 3 = 3x^2(x - 1) + (5x^2 - 5x) + 5x - 4x + 3 = 3x^2(x - 1) + 5x(x - 1) + x + 3 = 3x^2(x - 1) + 5x(x - 1) + (x - 1) + 4 = (x - 1)(3x^2 + 5x + 1) + 4$.

Тогда, учитывая правило сложения дробей, данное выражение можно записать в виде

$$\frac{3x^3+2x^2-4x+3}{x-1} = \frac{(x-1)\left(3x^2+5x+1\right)+4}{x-1} =$$

$$= \frac{(x-1)\left(3x^2+5x+1\right)}{x-1} + \frac{4}{x-1} = 3x^2+5x+1+\frac{4}{x-1}.$$

Таким образом, данное выражение $\frac{3x^3 + 2x^2 - 4x + 3}{x-1}$ состоит из целой части $3x^2 + 5x + 1$ и дробной части $\frac{4}{x-1}$.

Заметим, что в примерах 4 и 5 фактически было проведено деление одного многочлена на другой. Вопрос о делимости многочленов будет рассмотрен на следующем уроке.

III. Задания на уроке и на дом

1. Найдите допустимые значения переменной и упростите дробь.

а) $\dfrac{1}{2+\dfrac{3}{x+4}}$; б) $\dfrac{2}{3+\dfrac{1}{x+5}}$; в) $\dfrac{1+\dfrac{2}{x+3}}{2+\dfrac{3}{x+4}}$; г) $\dfrac{2-\dfrac{3x}{x+1}}{1-\dfrac{x+2}{2x+3}}$.

Ответы: а) $\frac{x+4}{2x+11}$ при $x \neq -4$ и $x \neq -5{,}5$; б) $\frac{2(x+5)}{3x+16}$ при $x \neq -5$ и $x \neq -\frac{16}{3}$;

в) $\frac{(x+5)(x+4)}{(x+3)(2x+11)} = \frac{x^2+9x+20}{2x^2+17x+33}$ при $x \neq -4$, $x \neq -3$ и $x \neq -5{,}5$;

г) $\frac{(2-x)(2x+3)}{(x+1)^2} = \frac{6+x-2x^2}{x^2+2x+1}$ при $x \neq -1{,}5$ и $x \neq -1$.

2. Известно, что $\frac{a+4b}{5a-7b} = 2$. Найдите:

а) $\frac{3a-7b}{a+b}$; б) $\frac{2a+9b}{2a+5b}$; в) $\frac{2a^2+3ab-b^2}{a^2-2ab+5b^2}$; г) $\frac{a^2-5ab+3b^2}{3a^2-ab+2b^2}$.

Ответы: а) $-\frac{1}{3}$; б) $\frac{13}{9}$; в) $\frac{13}{5}$; г) $-\frac{1}{4}$ (по условию задачи: найти $a = 2b$).

3. Известно, что $a^2 + 9b^2 = 6ab$. Найдите:

а) $\frac{2a-5b}{a-b}$; б) $\frac{3a-b}{2a+b}$; в) $\frac{2a^2-ab+4b^2}{a^2-4b^2}$; г) $\frac{3a^2-2ab+5b^2}{a^2-5ab+2b^2}$.

Ответы: а) $\frac{11}{4}$; б) 2; в) 5; г) $\frac{19}{13}$ (по условию задачи: найти $a = -3b$).

4. Известно, что $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Докажите, что:

а) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; б) $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$; в) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$;

г) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{na+mc}{nb+md}$; д) $\frac{na+mb}{xa+yb}=\frac{nc+md}{xc+yd}$ (указание: обозначьте отношение $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=t$, тогда $a=bt$ и $c=td$).

5. При каких натуральных значениях n выражение является целым числом:

а) $\frac{n+3}{n+1}$; б) $\frac{5n+8}{n+1}$; в) $\frac{n^2+2n}{n-1}$; г) $\frac{2n^2-3n+3}{n-2}$?

Ответы: а) $n=1$; б) $n=2$; в) $n=2$ и $n=4$; г) $n=3$ и $n=7$ (указание: в данном дробном выражении выделите целую и дробную части).

6. При каких целых значениях n выражение также является целым числом:

а) $\frac{3n+9}{n+1}$; б) $\frac{6n-7}{n-2}$; в) $\frac{4n^2-13n+5}{n-3}$; г) $\frac{3n^2+10n-1}{n+4}$?

Ответы: а) –4; –2; 0; б) –3; 1; 3; 7; в) 1; 2; 4; 5; г) –11; –5; –3; 3.

7. В дробном выражении найдите целую и дробную части:

а) $\frac{5}{x-3}$; б) $\frac{2}{x+1}$; в) $\frac{3x-6}{x-2}$; г) $\frac{2x+10}{x+5}$; д) $\frac{2x+15}{x+6}$; е) $\frac{5x-10}{2x-3}$;

ж) $\frac{x^2+x+1}{x+2}$; з) $\frac{6x^2+7x+4}{3x-1}$; и) $\frac{3x^3-2x^2-3x+5}{x+1}$;

к) $\frac{2x^3-x^2-5x+3}{x-2}$.

Ответы: а) целая часть 0, дробная часть $\frac{5}{x-3}$;

б) целая часть 0, дробная часть $\frac{2}{x+1}$;

в) целая часть 3, дробная часть 0;

г) целая часть 2, дробная часть 0;

д) целая часть 2, дробная часть $\frac{3}{x+6}$;

е) целая часть 2,5, дробная часть $-\frac{5}{2(2x-3)}=\frac{5}{6-4x}$;

ж) целая часть $x-1$, дробная часть $\frac{3}{x+2}$;

з) целая часть $2x+3$, дробная часть $\frac{7}{3x-1}$;

и) целая часть $3x^2-5x+2$, дробная часть $\frac{3}{x+1}$;

к) целая часть $2x^2 + 3x + 1$, дробная часть $\dfrac{5}{x-2}$ (указание: в числителе дроби выделите слагаемые, пропорциональные знаменателю).

IV. Подведение итогов урока

Факультативный урок. Деление многочленов

Цель: изучить деление многочлена на многочлен.

Планируемые результаты: научиться находить частное и остаток при делении многочленов.

Тип урока: урок общеметодологической направленности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

С необходимостью деления двух многочленов (одной переменной) мы столкнулись на предыдущих занятиях. Рассмотрим этот вопрос более подробно. При делении многочлена степени n на многочлен степени m ($n \geq m$) в частном получается многочлен степени $n - m$ и в остатке – многочлен степени $m - 1$. Процесс деления многочленов аналогичен процессу деления натуральных чисел «уголком» и осуществляется таким образом, чтобы на каждом промежуточном этапе деления исчезала старшая степень делимого многочлена.

Пример 1

Разделим многочлен четвертой степени $A = x^4 - 2x^3 - 2x + 3$ на многочлен второй степени $B = x^2 - 3x + 1$.

Выполним такое деление «уголком». Первое слагаемое частного

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 2x^3 - 2x + 3 & x^2 - 3x + 1 \longleftarrow \text{делитель} \\ \cline{2-2}
-\ \underline{x^4 - 3x^3 + x^2} \qquad\quad & x^2 + x + 2 \longleftarrow \text{частное} \\
x^3 - x^2 - 2x \quad\ & \\
-\ \underline{x^3 - 3x^2 + x} \quad\ & \\
2x^2 - 3x + 3 & \\
-\ \underline{2x^2 - 6x + 2} & \\
3x + 1 &
\end{array}
$$

получается делением старшего члена делимого на старший член делителя ($x^4 : x^2 = x^2$). Затем это слагаемое (x^2) умножается на делитель $x^2 - 3x + 1$. Получаем $x^2(x^2 - 3x + 1) = x^4 - 3x^3 + x^2$. Этот результат вычитается из делимого и получается первый остаток $x^3 - x^2$. К этому остатку сносим следующий член делимого $-2x$. Имеем многочлен $x^3 - x^2 - 2x$.

Этот многочлен $x^3 - x^2 - 2x$ воспринимается как новое делимое, и повторяется тот же процесс. Старший член многочлена x^3 делится на старший член делителя ($x^3 : x^2 = x$). Получаем второе слагаемое частного (x). Это слагаемое x умножается на делитель $x^2 - 3x + 1$. Имеем $x(x^2 - 3x + 1) = x^3 - 3x^2 + x$. Этот результат вычитается из делимого и получается второй остаток $2x^2 - 3x$. К этому остатку сносим следующий последний член делимого 3. Имеем многочлен $2x^2 - 3x + 3$.

Полученный многочлен $2x^2 - 3x + 3$ считаем новым делимым и вновь повторяем процесс. Старший член многочлена делим на старший член делителя ($2x^2 : x^2 = 2$). Имеем третье слагаемое частного (2). Это слагаемое 2 умножается на делитель $x^2 - 3x + 1$. Получаем $2(x^2 - 3x + 1) = 2x^2 - 6x + 2$. Этот результат вычитаем из делимого и получаем многочлен первой степени $3x + 1$. Так как степень этого остатка (первая) меньше степени делителя (вторая), то на этом процесс деления заканчивается.

Итак, при делении многочлена A на многочлен B в частном получаем многочлен второй степени $x^2 + x + 2$, в остатке – многочлен первой степени $3x + 1$. Как и при делении чисел, делимое можно представить в виде: делимое = делитель · частное + остаток.

В данном случае можно записать: $x^4 - 2x^3 - 2x + 3 = (x^2 - 3x + 1) \cdot (x^2 + x + 2) + (3x + 1)$. В справедливости этого равенства легко убедиться, если в правой части раскрыть скобки и привести подобные члены.

Может оказаться, что при делении одного многочлена на другой остаток равняется нулю, т. е. один многочлен без остатка делится на другой.

Пример 2

Разделим многочлен четвертой степени $A = 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 14x + 3$ на многочлен второй степени $B = x^2 - x + 3$.

Разделим данные многочлены уголком и получим

$$\begin{array}{r|l}
-\;2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 14x + 3 & x^2 - x + 3 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^4 - 2x^3 + 6x^2} \qquad\qquad\quad & 2x^2 + 5x + 1 \\
-\;5x^3 - 4x^2 + 14x \qquad & \\
\underline{5x^3 - 5x^2 + 15x} \qquad & \\
-\;x^2 - x + 3 \qquad & \\
\underline{x^2 - x + 3} \qquad & \\
0 \qquad &
\end{array}$$

Видно, что в частном получается многочлен второй степени $2x^2 + 5x + 1$, в остатке – нуль. Поэтому можно записать: $2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 14x + 3 = (x^2 - x + 3)(2x^2 + 5x + 1)$, т. е. делимое = = делитель · частное.

Пример 3

При каких целых значениях a рациональная дробь $A = \dfrac{6a^2 + 5a + 6}{2a + 1}$ также будет целым числом? Найдите эти числа.

В дроби A выделим целую часть. Для этого разделим ее числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\,6a^2 + 5a + 6 & 2a+1 \\ \cline{2-2} \underline{6a^2 + 3a\phantom{{}+6}} & 3a+1 \\ -\,2a + 6 & \\ \underline{2a + 1} & \\ 5 & \end{array}$$

При делении получили в частном $3a + 1$, в остатке – 5. Поэтому числитель дроби можно записать в виде $6a^2 + 5a + 6 = (2a + 1)(3a + 1) + 5$. Используя свойство сложения, выделим в дроби A целую часть. Получаем

$$A = \frac{6a^2 + 5a + 6}{2a + 1} = \frac{(2a+1)(3a+1)+5}{2a+1} = \frac{(2a+1)(3a+1)}{2a+1} +$$

$$+ \frac{5}{2a+1} = 3a + 1 + \frac{5}{2a+1}.$$

Так как по условию число a целое, то значение выражения $3a + 1$ также будет целым числом. Поэтому требуется, чтобы дробь $\dfrac{5}{2a+1}$ была целым числом. Это возможно только в том случае, если ее знаменатель является делителем числителя. Числитель дроби имеет четыре делителя: ± 1 и ± 5. Рассмотрим эти случаи.

а) $2a + 1 = 1$. Из этого уравнения находим $a = 0$ и дробь $A = 1 + 5 = 6$.

б) $2a + 1 = -1$. Корень этого уравнения $a = -1$, и дробь $A = 3 \cdot (-1) + 1 + \dfrac{5}{-1} = -7$.

в) $2a + 1 = 5$. Из уравнения находим $a = 2$ и дробь $A = 3 \cdot 2 + 1 + \dfrac{5}{5} = 8$.

г) $2a + 1 = -5$. Корень этого уравнения $a = -3$, и дробь $A = 3 \cdot (-3) + 1 + \dfrac{5}{-5} = -9$.

Итак, при $a = 0$ $A = 6$, при $a = -1$ $A = -7$, при $a = 2$ $A = 8$, при $a = -3$ $A = -9$.

Пример 4

Найдите целочисленные решения уравнения $2xy + y + 6x - 9 = 0$ (т. е. те решения, которые являются целыми числами).

Сначала из данного уравнения выразим одну из переменных, например y. Получаем: $2xy + y = -6x + 9$ или $(2x + 1)y = -6x + 9$. Так как по условию x – целое число, то выражение $2x + 1 \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $2x + 1$ и получим $y = \dfrac{-6x+9}{2x+1} = -3 + \dfrac{12}{2x+1}$. По условию величина y должна быть целым числом. Так как число -3 целое, то дробь $\dfrac{12}{2x+1}$ также должна быть целым числом. Это возможно, если знаменатель дроби является делителем числителя. Числитель 12 имеет делители ±1; ±2; ±3; ±4; ±6; ±12. При целых значениях x величина $2x + 1$ будет нечетным числом. Поэтому надо рассмотреть четыре случая.

а) $2x + 1 = 1$. Из этого уравнения найдем $x = 0$, и тогда $y = -3 + \dfrac{12}{1} = 9$.

б) $2x + 1 = -1$. Корень этого уравнения $x = -1$, тогда $y = -3 + \dfrac{12}{-1} = -15$.

в) $2x + 1 = 3$. Из этого уравнения находим $x = 1$, и тогда $y = -3 + \dfrac{12}{3} = 1$.

г) $2x + 1 = -3$. Корень этого уравнения $x = -2$, тогда $y = -3 + \dfrac{12}{-3} = -7$.

Итак, данное уравнение имеет четыре целочисленных решения: $(0; 9)$, $(-1; -15)$, $(1; 1)$, $(-2; -7)$.

III. Задания на уроке и на дом

1. Разделите многочлен A на многочлен B.

а) $A = 4x^2 + 5x - 2$, $B = 4x - 1$;

б) $A = 10x^2 - 11x + 3$, $B = 5x - 3$;

в) $A = 3x + 4$, $B = 7x^2 - 5x + 1$;

г) $A = 5x - 4$, $B = 6x^2 - x + 4$;

д) $A = 6x^3 - 11x^2 - 7x + 4$, $B = 3x + 2$;

е) $A = 12x^3 - 13x^2 + 23x - 19$, $B = 4x - 3$;

ж) $A = 2x^4 - x^3 + x - 4$, $B = x^2 + x + 1$;
з) $A = 6x^4 - 17x^3 + 16x^2 - 11x + 8$, $B = 2x^2 - 5x + 3$.

Ответы: а) частное $3x + 2$, остаток 0;
б) частное $2x - 1$, остаток 0;
в) частное 0, остаток $3x + 4$;
г) частное 0, остаток $5x - 4$;
д) частное $2x^2 - 5x + 1$, остаток 2;
е) частное $3x^2 - x + 5$, остаток -4;
ж) частное $2x^2 - 3x + 1$, остаток $3x - 5$;
з) частное $3x^2 - x + 1$, остаток $-3x + 5$.

2. При каких целых значениях a дробь A также будет целым числом? Найдите это число.

а) $A = \dfrac{2a^2 - 3a - 2}{a - 2}$;

б) $A = \dfrac{3a^2 + a - 2}{a + 1}$;

в) $A = \dfrac{2a^2 - 3a + 3}{2a + 1}$;

г) $A = \dfrac{3a^2 + a + 5}{3a - 2}$;

д) $A = \dfrac{6a^3 - a^2 + 2a + 1}{3a + 1}$;

е) $A = \dfrac{5a^3 - 2a^2 + 5a - 2}{5a - 2}$;

ж) $A = \dfrac{6a^2 + 7a - 5}{2a + 3}$;

з) $A = \dfrac{10a^2 + a + 4}{2a + 1}$;

и) $A = \dfrac{6a^3 - 7a^2 + 3}{3a + 1}$;

к) $A = \dfrac{4a^3 - 5a^2 + 6a + 16}{4a + 3}$.

Ответы: а) при любых a, кроме $a = 2$, $A = 2a + 1$;
б) при любых a, кроме $a = -1$, $A = 3a - 2$;
в) при $a = 0$ $A = 3$, при $a = -1$ $A = -8$, при $a = 2$ $A = 1$, при $a = -3$ $A = -6$;
г) при $a = 1$ $A = 9$, при $a = 3$ $A = 5$;
д) при любых a $A = 2a^2 - a + 1$;
е) при любых a $A = a^2 + 1$;
ж) таких a нет;
з) таких a нет;
и) при $a = 0$ $A = 3$, при $a = -1$ $A = 5$;
к) при $a = -1$ $A = -1$, при $a = 1$ $A = 3$.

3. Найдите целочисленные решения уравнения:
а) $(2x - 3)(y + 1) = 2$;
б) $(x - 2)(3y + 1) = 3$;
в) $xy + 3x - y - 5 = 0$;

Ответы: а) (2; 1); (1; –3); б) (5; 0); в) (2; –1); (0; –5); (3; –2); (–1; –4).

IV. Подведение итогов урока

Факультативный урок. Дробно-линейная функция и ее график

Цель: рассмотреть свойства дробно-линейной функции и построение ее графика.

Планируемые результаты: научиться строить графики дробно-линейных функций.

Тип урока: урок-исследование.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

Рассмотрим функцию более общую, чем обратная пропорциональность. Функция $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (где x – независимая переменная; a, b, c, d – некоторые числа, причем $c \neq 0$ и $bc - ad \neq 0$) называется *дробно-линейной* функцией. Обратите внимание на то, что данная функция представляет собой дробь, числитель и знаменатель которой являются линейными функциями.

Заметим, что требование в определении о том, что $c \neq 0$ и $bc - ad \neq 0$, важно. Если это требование не выполняется, то дробно-линейная функция является на самом деле линейной (свойства и график такой функции были изучены в 7 классе).

а) Пусть $c = 0$ (при этом $d \neq 0$). Подставив это значение в функцию $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, получим $y = \dfrac{ax+b}{d} = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d} = \bar{a}x + \bar{b}$ (где числа $\bar{a} = \dfrac{a}{d}$ и $\bar{b} = \dfrac{b}{d}$). Очевидно, что функция $y = \bar{a}x + \bar{b}$ линейная.

б) Пусть $bc - ad = 0$ и $c \neq 0$. Выразим из этого равенства $b = \dfrac{ad}{c}$, подставим в формулу: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Получаем $y = \dfrac{ax + \frac{ad}{c}}{cx+d}$. Умножим числитель и знаменатель дроби на число c. Имеем

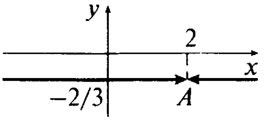
$$y = \frac{c\left(ax + \frac{ad}{c}\right)}{c(cx+d)} = \frac{acx + ad}{c(cx+d)} = \frac{a(cx+d)}{c(cx+d)} = \frac{a}{c} \text{ – некоторое число.}$$

В этом случае также получили частный случай линейной функции.

Пример 1

Определите вид функции $y = \dfrac{2x-4}{6-3x}$ и постройте ее график.

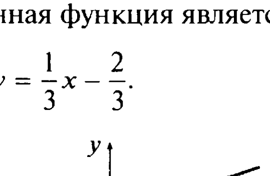
Запишем данную функцию в виде $y = \dfrac{2x-4}{-3x+6}$. Сравнивая эту функцию с дробно-линейной функцией $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, видим что $a = 2$, $b = -4$, $c = -3$, $d = 6$. Легко проверить, что $bc - ad = (-4)(-3) - 2 \cdot 6 = 12 - 12 = 0$. Поэтому данная функция не является дробно-линейной. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее. Имеем $y = \dfrac{2x-4}{6-3x} = \dfrac{2(x-2)}{-3(x-2)} = -\dfrac{2}{3}$ (при этом $x - 2 \neq 0$, т. е. $x \neq 2$). Поэтому данная функция является линейной. Построим график функции $y = -\dfrac{2}{3}$ (горизонтальная прямая) и исключим из него точку A с абсциссой $x = 2$ (показана стрелками).



Пример 2

Определите вид функции $y = \dfrac{2x-4}{6}$ и постройте ее график.

Сравнивая эту функцию с дробно-линейной функцией $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, видим, что $a = 2$, $b = -4$, $c = 0$, $d = 6$. Поэтому данная функция не является дробно-линейной. Используя свойство сложения дробей, запишем функцию в виде $y = \dfrac{2x-4}{6} = \dfrac{2x}{6} - \dfrac{4}{6} = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$. Поэтому данная функция является линейной. Построим график функции $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$.



Можно показать, что графиком дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (при $c \neq 0$ и $bc - ad \neq 0$) будет гипербола, сдвинутая вдоль оси абсцисс и оси ординат. Такой сдвиг является одним из способов построения графика этой функции (данный способ будет изучаться в 9 классе). Здесь мы рассмотрим другой способ построения. Для этого перечислим и обсудим свойства дробно-линейной функции.

1. Область определения функции – множество всех значений x, кроме $x = -\frac{d}{c}$ (так как при таком значении знаменатель $cx + d = 0$).

2. Точка пересечения графика функции с осью ординат $y = \frac{b}{d}$ при $d \neq 0$, и такой точки не существует при $d = 0$. Для ее определения подставим значение $x = 0$ в формулу, задающую функцию.

3. Точка пересечения графика функции с осью абсцисс $x = -\frac{b}{a}$ при $a \neq 0$, и такой точки не существует при $a = 0$. Для ее определения положим $y = 0$ в формуле $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ и решим уравнение $0 = \frac{ax + b}{cx + d}$, или $0 = ax + b$.

4. Вертикальная асимптота графика функции имеет уравнение $x = -\frac{d}{c}$, так как для такого значения x функция не определена и при приближении к этому значению $|y|$ возрастает.

5. Горизонтальная асимптота графика функции имеет уравнение $y = \frac{a}{c}$, так как при больших значениях $|x|$ числитель $ax + b \approx ax$ и знаменатель $cx + d \approx cx$ и функция $y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{ax}{cx} = \frac{a}{c}$.

6. Графиком функции является гипербола, ветви которой симметричны относительно точки пересечения асимптот. Ветви гиперболы не пересекают асимптоты графика.

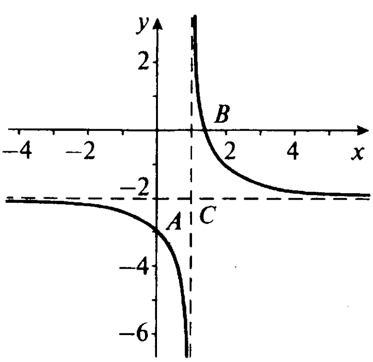
Видно, что свойства дробно-линейной функции обобщают свойства обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$. Это понятно, так как функция $y = \frac{k}{x}$ является частным случаем функции $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ при $a = 0$, $d = 0$ и $\frac{b}{c} = k$. Используя перечисленные свойства, легко построить эскиз графика дробно-линейной функции.

Пример 3

Построим график функции $y = \dfrac{2x-3}{-x+1}$.

Сначала найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Так как любая точка на оси ординат имеет абсциссу $x = 0$, то для этого значения x вычислим $y = \dfrac{2 \cdot 0 - 3}{-0+1} = \dfrac{-3}{1} = -3$ – точку A пересечения графика с осью ординат. Любая точка на оси абсцисс имеет ординату $y = 0$. Поэтому в формуле функции положим $y = 0$ и получим уравнение $0 = \dfrac{2x-3}{-x+1}$. Дробь равна нулю, если ее числитель $2x - 3 = 0$ (а знаменатель при этом не равен нулю). Решив это уравнение, найдем $x = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ – точку B пересечения графика с осью абсцисс.

Найдем теперь уравнения асимптот. Вертикальную асимптоту определим из условия, что данная функция не определена, т. е. знаменатель $-x + 1$ равен нулю, откуда $x = 1$. Горизонтальная асимптота находится из условия, что $|x|$ велико. В этом случае для функции $y = \dfrac{2x-3}{-x+1}$ в числителе пренебрежем числом -3 (т. е. $2x - 3 \approx 2x$), в знаменателе пренебрежем числом 1 (т. е. $-x + 1 \approx -x$). Тогда значение функции $y \approx \dfrac{2x}{-x} = -2$. Прямая $y = -2$ является горизонтальной асимптотой.



На координатной плоскости отметим точки A и B, построим асимптоты. Проведем ветви гиперболы, проходящие через точки A и B симметрично относительно точки C пересечения асимптот. При этом при $x \to 1$ ветви графика приближаются к вертикальной асимптоте, при больших $|x|$ ветви графика приближаются к горизонтальной асимптоте. Ветви графика при этом асимптоты не пересекают.

III. Задания на уроке и на дом

1. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{3x-6}{2}$; б) $y = \dfrac{4-x}{3}$; в) $y = \dfrac{x-3}{4}$; г) $y = \dfrac{6-2x}{3}$.

2. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{3x-6}{x-2}$; б) $y = \dfrac{3-x}{2x-6}$; в) $y = \dfrac{2x+4}{x+2}$; г) $y = \dfrac{4-3x}{6x-8}$.

3. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{2}{x+2}$; б) $y = \dfrac{1}{3-x}$; в) $y = \dfrac{3}{2x-3}$; г) $y = \dfrac{4}{5+2x}$.

4. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{3-2x}{x}$; б) $y = \dfrac{1+2x}{x}$; в) $y = \dfrac{2-3x}{2x}$; г) $y = \dfrac{-4+3x}{2x}$.

5. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$; б) $y = \dfrac{2x-3}{1-2x}$; в) $y = \dfrac{3-x}{x-2}$; г) $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

IV. Подведение итогов урока

Факультативный урок. Графики функций, содержащих модуль

Цель: вспомнить понятие модуля и рассмотреть построение графиков функций, содержащих модуль.

Планируемые результаты: усвоить понятие модуля и научиться строить графики функций, содержащих модуль.

Тип урока: урок-практикум.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Работа по теме урока

План урока

1. Понятие модуля числа (выражения).
2. Графики функций, содержащих модуль.

1. Понятие модуля числа (выражения)

Сначала напомним понятие модуля числа и его основные свойства.

Модулем (*абсолютной величиной*) действительного числа a называется само это число a, если оно неотрицательно, и противоположное число $(-a)$, если число a отрицательно. Модуль числа a обозначают символом (значком) $|a|$.

Итак, $|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \ge 0, \\ a, \text{если } a < 0. \end{cases}$

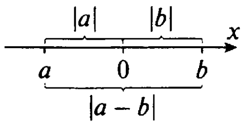
Пример 1

а) $|5{,}6| = 5{,}6$, так как число $a = 5{,}6$ неотрицательно (и даже положительно);

б) $|0| = 0$, так как число $a = 0$ неотрицательно;

в) $|-2{,}3| = -(-2{,}3) = 2{,}3$, так как число $a = -2{,}3$ отрицательно.

На числовой оси $|a|$ отвечает расстоянию от точки a до точки 0; $|a - b|$ отвечает расстоянию между точками $a - b$.



Свойства абсолютных величин чисел:

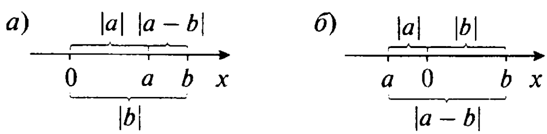
1) $|a| \ge 0$; 2) $|-a| = |a|$; 3) $|ab| = |a|\,|b|$; 4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \ne 0)$; 5) $|a|^2 = a^2$.

Эти свойства легко выводятся из определения и геометрического смысла модуля числа a.

Пример 2

Доказать неравенство $|a - b| \le |a| + |b|$.

Неравенство легко доказать, используя геометрический смысл модуля числа. Изобразим на числовой оси числа a и b. Тогда $|a - b|$ – расстояние между точками a и b, $|a|$ – расстояние от точки a до точки 0, $|b|$ – расстояние от точки b до точки 0.



Если числа a и b одного знака (рис. *а*) (т. е. оба положительные или оба отрицательные), то видно, что $|a - b| < |a| + |b|$. Если числа a и b разных знаков (рис. *б*) (т. е. одно отрицательное, а другое положительное), то видно, что $|a - b| = |a| + |b|$. Объединяя эти два случая, получаем $|a - b| \le |a| + |b|$.

Пример 3

Решите уравнение: а) $|x-1|=-2$; б) $|x-1|=0$; в) $|x-1|=2$.

а) Очевидно, что такое уравнение решений не имеет, так как расстояние между точками x и 1 не может быть отрицательным.

б) В этом уравнении расстояние между точками x и 1 равно нулю, т. е. точки x и 1 совпадают. Поэтому уравнение имеет единственное решение $x = 1$.

Это решение легко проверить: $|x-1|=|1-1|=|0|=0$.

в) В таком уравнении расстояние между точками x и 1 равно 2, т. е. точка x удалена от точки 1 на две единицы. Поэтому или число x меньше числа 1 на две единицы (т. е. $x = 1 - 2 = -1$), или число x больше числа 1 на две единицы (т. е. $x = 1 + 2 = 3$). Следовательно, уравнение имеет два решения: $x = -1$ и $x = 3$.

Эти решения также легко проверить. Для значения $x = -1$ получаем: $|-1-1|=|-2|=-(-2)=2$. Для значения $x = 3$ имеем: $|3-1|=|2|=2$.

Заметим, что возможен и другой способ решения. Если $|x-1|=2$, то сама величина $x-1$ может равняться или 2, или -2. Получаем два линейных уравнения: $x - 1 = 2$ (его корень $x = 3$) и $x - 1 = -2$ (корень $x = -1$).

Перейдем теперь к рассмотрению графиков функций, содержащих модуль.

2. Графики функций, содержащих модуль

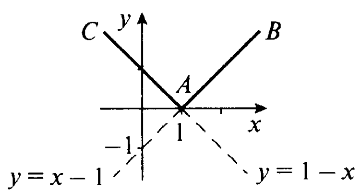
Пример 4

Постройте график функции $y = |x-1|$.

Так как в формулу функции входит модуль, то его необходимо раскрыть, рассмотрев два случая. В этом примере $a = x - 1$. Поэтому функцию можно записать в виде

$$y=\begin{cases}x-1, \text{если } x-1\ge 0,\\ 1-x, \text{если } x-1<0\end{cases}=\begin{cases}x-1, \text{если } x\ge 1,\\ 1-x, \text{если } x<1.\end{cases}$$

Поэтому построим график функции $y = x - 1$ и выберем из него луч AB, точки которого удовлетворяют условию $x \ge 1$. Также строим график линейной функции $y = 1 - x$ и выберем из него луч AC, точки которого удовлетворяют условию $x < 1$. Таким образом, графиком данной функции является ломаная CAB.



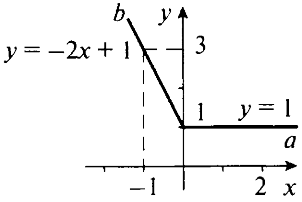
Пример 5

Постройте график функции $y = |x| - x + 1$.

Так как в эту функцию входит $|x|$, то необходимо рассмотреть два случая.

а) Если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и получаем $y = x - x + 1 = 1$ или $y = 1$. Строим прямую $y = 1$ для неотрицательных значений x ($x \geq 0$).

б) Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и получаем $y = -x - x + 1 = -2x + 1$ или $y = -2x + 1$. Для отрицательных x ($x < 0$) строим прямую $y = -2x + 1$. В результате получаем график данной функции, состоящий из лучей a и b.



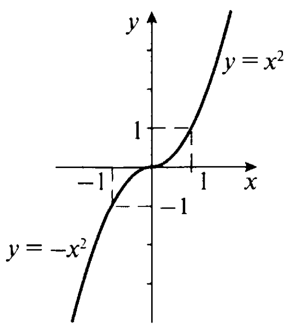
Пример 6

Постройте график функции $y = x|x|$.

Вновь раскроем $|x|$, рассмотрев два случая.

а) Если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и функция имеет вид $y = x \cdot x = x^2$. Построим параболу $y = x^2$ для неотрицательных значений x (т. е. $x \geq 0$).

б) Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и функция имеет вид $y = x \cdot (-x) = -x^2$. Строим параболу $y = -x^2$ для отрицательных значений x (т. е. $x < 0$).

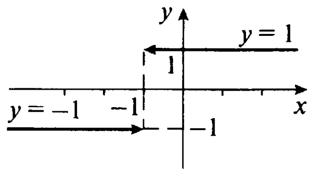


Пример 7

Постройте график функции $y = \dfrac{x+1}{|x+1|}$.

Величина $a = x + 1$, стоящая под знаком модуля, может быть как положительной, так и отрицательной (нулю эта величина равняться не может). Поэтому по определению модуля запишем функцию в виде $y = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+1}, \text{если } x+1>0, \\ \dfrac{x+1}{-(x+1)}, \text{если } x+1<0 \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{если } x>-1, \\ -1, \text{если } x<-1. \end{cases}$

Строим прямую с уравнением $y = 1$ для $x > -1$ и прямую $y = -1$ для $x < -1$.

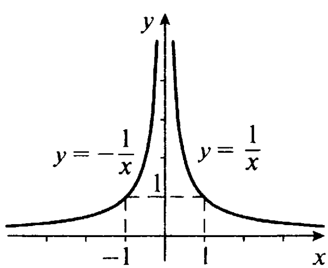


В точке $x = -1$ функция не определена. Поэтому точки графика, для которых $x = -1$, указаны стрелками (эти точки в график не входят).

Пример 8

Постройте график функции $y = \dfrac{1}{|x|}$.

Можно построить этот график, пользуясь определением модуля. Получаем $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{если } x>0, \\ \dfrac{1}{-x}, \text{если } x<0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{если } x>0, \\ -\dfrac{1}{x}, \text{если } x<0. \end{cases}$ Поэтому для положительных значений x строим ветвь гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$, для отрицательных значений x построим ветвь гиперболы $y = -\dfrac{1}{x}$.



Значительно проще построить график этой функции, если использовать понятие о *четности* (*нечетности*) функций. Предварительно введем еще одно понятие – симметричность области определения функции. Область определения называется *симметричной*, если функция определена и в точке x_0, и в точке $(-x_0)$ (т. е. в точке, симметричной x_0 относительно начала числовой оси).

Пример 9

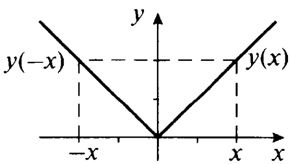
а) Областью определения функции $y = \dfrac{5x+2}{x^2-1}$ являются все значения x, кроме тех, для которых $x^2 - 1 = 0$ (т. е. $x = \pm1$). Поэтому эта функция определена, например, как при $x = -3$, так и при $x = -(-3) = 3$. И наоборот, эта функция не определена и при $x = -1$, и при $x = -(-1) = 1$. Следовательно, область определения данной функции (все x, кроме $x = \pm1$) симметрична.

б) Областью определения функции $y = \dfrac{5x+2}{x-1}$ являются все значения x, кроме тех, для которых $x - 1 = 0$ (т. е. $x = 1$). Поэтому эта функция определена в точке $x = -1$, но не определена в симметричной точке $x = -(-1) = 1$. Итак, область определения данной функции несимметрична.

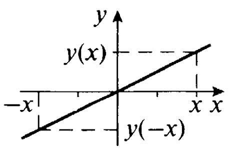
Понятие четности функции вводится только для функции с симметричной областью определения. Функция называется *четной*, если при изменении знака аргумента значение функции не меняется, т. е. $y(-x) = y(x)$. График четной функции всегда симметричен относительно оси ординат.

Функция называется *нечетной*, если при изменении знака аргумента значение функции также меняется на противоположное, т. е. $y(-x) = -y(x)$. График нечетной функции всегда симметричен относительно начала координат.

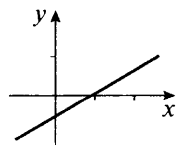
На рисунках приведены (для наглядности) графики четной, нечетной функции и функции, не имеющей никакой четности.



Четная функция
$y(-x) = y(x)$



Нечетная функция
$y(-x) = -y(x)$



Функция, не имеющая четности

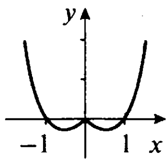
Пример 10

Выясните четность следующих функций:

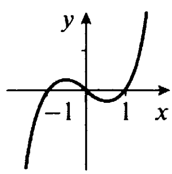
а) $y = x^2 - |x|$; б) $y = x^3 - x$; в) $y = 2x - 4$.

Прежде всего отметим, что область определения всех трех функций (любые x) симметрична. Для выяснения четности этих функций $y(x)$ остается найти значение $y(-x)$ и сравнить значения $y(x)$ и $y(-x)$.

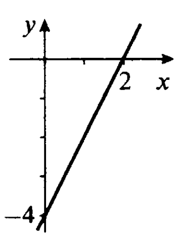
а) $y(-x) = (-x)^2 - |-x| = x^2 - |x|$ (здесь было учтено, что $(-x)^2 = x^2$ и $|-x| = |x|$). Теперь легко видеть, что $y(-x)$ совпадает с данной функцией $y(x)$, т. е. $y(-x) = y(x)$. Поэтому данная функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат.



б) $y(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -y(x)$. Видно, что значения функции в точках x и $-x$ противоположны по знаку, т. е. $y(-x) = -y(x)$. Поэтому данная функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.



в) $y(-x) = 2(-x) - 4 = -2x - 4$. Сравнивая $y(-x) = -2x - 4$ со значением $y(-x) = 2x - 4$, видим, что соотношение $y(-x) = y(x)$ не выполняется. Поэтому эта функция не будет четной. Найдем теперь величину $y(-x) = -(2x - 4) = -2x + 4$. Сравнивая $y(-x) = -2x - 4$ и $-y(x) = -2x + 4$, видим, что соотношение $y(-x) = -y(x)$ также не выполняется. Поэтому эта функция не будет нечетной.



Итак, данная функция никакой четности не имеет и ее график не обладает никакой симметрией.

Вернемся еще раз к примеру 8. Очевидно, что функция $y = \dfrac{1}{|x|}$ четная (ее область определения (все x, кроме $x = 0$) симметрична, и $y(-x) = -y(x)$). Поэтому график этой функции симметричен относительно оси ординат. Следовательно, достаточно построить график только для положительных значений x и симметрично отразить его относительно оси ординат в область отрицательных значений x. В итоге получается график, приведенный в примере 8.

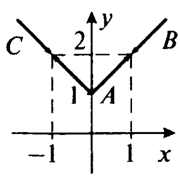
Пример 11

Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{|x| - 1}$.

Область определения функции задается условием $|x| - 1 \neq 0$, т. е. $|x| \neq 1$ и $x \neq \pm 1$. Эта область является симметричной. Докажем, что данная функция четная. Найдем $y(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 1}{|-x| - 1} = \dfrac{x^2 - 1}{|x| - 1}$.

Видно, что выполняется соотношение $y(-x) = y(x)$ для всех x из области определения функции. Поэтому график функции будет симметричен относительно оси ординат.

При $x \geq 0$ по определению $|x| = x$, и функцию можно записать в виде $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = x + 1$ (при этом $x \neq 1$).



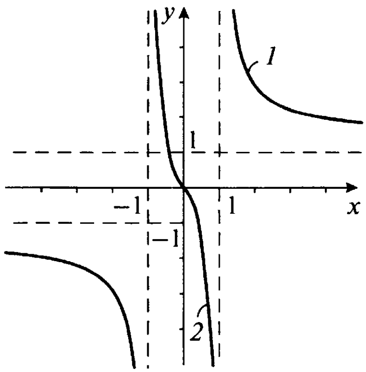
Поэтому строим график линейной функции $y = x + 1$ для неотрицательных значений x (луч AB), удаляем из него точку с абсциссой $x = 1$ (показана стрелками). Затем этот график симметрично отражаем относительно оси ординат (получаем луч AC). Поэтому графиком данной функции является ломаная CAB.

Пример 12

Постройте график функции $y = \dfrac{x}{|x| - 1}$.

Аналогично предыдущему примеру устанавливаем, что область определения функции (все x, кроме $x = \pm 1$) симметрична. Найдем $y(-x) = \dfrac{-x}{|-x| - 1} = \dfrac{-x}{|x| - 1} = -\dfrac{x}{|x| - 1} = -y(x)$. Так как выполнено равенство $y(-x) = -y(x)$, то данная функция нечетная. Поэтому ее график симметричен относительно начала координат.

Для $x \geq 0$ данная функция является дробно-линейной функцией $y = \dfrac{x}{x - 1}$. Строим график этой функции (гипербола).



Он состоит из ветви *1* целиком и части ветви *2*. Построенный график симметрично отражаем относительно начала координат. При этом асимптота $x = 1$ отражается в асимптоту $x = -1$, асимптота $y = 1$ отражается в асимптоту $y = -1$.

Итак, для построения графика функции, содержащей модуль величины, надо раскрыть этот модуль. После этого построить части графика, учитывая ограничения на переменную x. Если функция обладает определенной четностью (т. е. является четной или нечетной), то достаточно построить часть графика функции для $x \geq 0$. Затем симметрично отразить эту часть графика относительно оси ординат, если функция четная, и относительно начала координат, если функция нечетная.

Более детально о функциях, их свойствах, построении графиков функций, основных преобразованиях графиков функций будет рассказано в 9 классе.

III. Задания на уроке и на дом

1. Постройте график функции:

а) $y = |x - 2|$; б) $y = |x + 1|$; в) $y = -|x + 2|$; г) $y = -|x - 1|$; д) $y = x + |x + 1|$; е) $y = x - |x - 2|$; ж) $y = x + 2|x - 1|$; з) $y = 2x - |x + 2|$; и) $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$; к) $y = \dfrac{|x-2|}{2-x}$; л) $y = x + \dfrac{|x|}{x}$; м) $y = -x + \dfrac{2x}{|x|}$.

2. Постройте график функции:

а) $y = x^2 + \dfrac{|x|}{x}$; б) $y = -x^2 - \dfrac{x}{|x|}$; в) $y = x|-x|$; г) $y = -x|x|$.

3. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{|x|-1}{x+2}$; б) $y = \dfrac{x-1}{|x|+2}$; в) $y = \dfrac{2-x}{|x|-1}$; г) $y = \dfrac{2-|x|}{x-1}$.

4. Определите четность (нечетность) функции и постройте ее график:

а) $y = 1 - |x|$; б) $y = 2|x| - 1$; в) $y = \dfrac{4 - x^2}{2 - |x|}$; г) $y = \dfrac{4x^2 - 9}{2|x| + 3}$;

д) $y = x^2 - 1$; е) $y = 1 - x^2$; ж) $y = (-x)^3$; з) $y = |x|^2 \cdot x$; и) $y = \dfrac{|x| - 2}{x}$;

к) $y = \dfrac{|x| + 1}{x}$; л) $y = \dfrac{|x| + 2}{x^2 - 4}$; м) $y = \dfrac{2|x| - 3}{4x^2 - 9}$.

5. Определите четность (нечетность) функции и постройте ее график:

а) $y = x^2 - 2|x|$; б) $y = |x| - x^2$; в) $y = x^2 + |x|$; г) $y = -2|x| - x^2$.

IV. Контрольные вопросы

1. Дайте определение модуля числа.
2. Геометрический смысл модуля числа.
3. Перечислите основные свойства модуля числа.
4. Какая область определения функции называется симметричной?
5. Дайте определение и укажите свойства функции:
   а) четной;
   б) нечетной.

V. Подведение итогов урока

Факультативный урок. Зачетная работа по теме «Рациональные дроби и их свойства»

Цель: проверить знания учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика зачетной работы

По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно, у учащихся появляется свобода выбора задач. Все задания разбиты на три блока: А, В и С. Самые простые задачи находятся в блоке А, более сложные – в блоке В, еще сложнее – в блоке С. Каждая задача из блока А оценивается в 1 балл, из блока В – в 2 балла, из блока С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий отдельное занятие можно и не посвящать (решения задач можно вывесить на стенде). Для этого приводится разбор заданий.

III. Зачетная работа

А

1. Найдите область допустимых значений переменной в выражении $A = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} - \frac{9 - 6x + x^2}{x - 3}$ и вычислите значение A.

2. Упростите выражение $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{2a}{b} + 1\right) \cdot \frac{b}{(a+b)^2}$.

3. Докажите, что значение выражения $\dfrac{\frac{3}{x} + \frac{x+3}{x^2 - x}}{\frac{2}{x} - \frac{x-2}{x^2 - x}}$ не зависит от переменной x.

4. Упростите выражение $\left(\frac{a+5}{5a-1} + \frac{a+5}{a+1}\right) : \frac{a^2 + 5a}{1 - 5a} + \frac{a^2 + 5}{a+1}$.

5. Найдите целочисленные решения уравнения $(x-1)(y+3) = 7$.

6. Найдите область определения функции $y = \frac{16}{(x+2)^2 - (x-2)^2}$ и постройте ее график.

7. Постройте график функции $y = \frac{1}{|x| + 2}$.

В

8. Упростите выражение

$$\left(\frac{a^2 - 2a + 4}{4a^2 - 1} \cdot \frac{2a^2 + a}{a^3 + 8} - \frac{a+2}{2a^2 - a}\right) : \frac{4}{a^2 + 2a} - \frac{a+4}{3 - 6a}.$$

9. Найдите область допустимых значений переменной в выражении $A = \dfrac{1 + \frac{x-1}{x+3}}{2 - \frac{x+1}{x-2}}$ и определите, при каком значении переменной $A = 0$.

10. При каком целом значении n дробь $A = \frac{2n^2 - n + 3}{2n - 1}$ будет целым числом?

11. Постройте график функции $y = \dfrac{|x| - 2}{|x| - 1}$.

C

12. При каких значениях a и b равенство $\dfrac{a}{x+5} + \dfrac{b}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2+24}{x^3+x^2-16x+20}$ является тождеством?

13. Найдите целочисленные решения уравнения $x^2 + 2xy = 3x + 6y + 2$.

14. Постройте график функции $y = \dfrac{x-3}{|x| - 1}$.

IV. Разбор заданий

1. Дроби, входящие в выражение A, имеют смысл, если их знаменатели не равны нулю. Из условий $x - 1 \neq 0$ и $x - 3 \neq 0$ находим $x \neq 1$ и $x \neq 3$. Поэтому область допустимых значений переменной x — любые x, кроме $x = 1$ и $x = 3$. Упростим выражение A. Для этого учтем, что числители дробей являются квадратами разности, и сократим дроби. Получаем

$$A = \frac{x^2-2x+1}{x-1} - \frac{9-6x+x^2}{x-3} = \frac{(x-1)^2}{x-1} - \frac{(3-x)^2}{x-3} =$$

$$= x - 1 - \frac{(x-3)^2}{x-3} = x - 1 - (x-3) = x - 1 - x + 3 = 2.$$

Ответ: любые x, кроме $x = 1$ и $x = 2$; 2.

2. Дроби в скобке приведем к общему знаменателю и учтем формулу квадрата суммы. Имеем

$$\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{2a}{b} + 1\right) \cdot \frac{b}{(a+b)^2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{b^2} \cdot \frac{b}{(a+b)^2} = \frac{(a+b)^2 \cdot b}{b^2 \cdot (a+b)^2} = \frac{1}{b}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{b}$.

3. Учтем, что слагаемые в числителе и знаменателе имеют одинаковые знаменатели. Поэтому по основному свойству дроби умножим числитель и знаменатель на $x^2 - x = x(x-1)$. Получаем

$$\frac{\dfrac{3}{x} + \dfrac{x+3}{x^2-x}}{\dfrac{2}{x} - \dfrac{x-2}{x^2-x}} = \frac{\dfrac{3}{x} + \dfrac{x+3}{x(x-1)}}{\dfrac{2}{x} - \dfrac{x-2}{x(x-1)}} = \frac{\left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{x+3}{x(x-1)}\right) \cdot x(x-1)}{\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{x-2}{x(x-1)}\right) \cdot x(x-1)} =$$

$$= \frac{3(x-1)+x+3}{2(x-1)-(x-2)} = \frac{3x-3+x+3}{2x-2-x+2} = \frac{4x}{x} = 4.$$

Видно, что значение данного выражения равно 4 и не зависит от переменной x.

Ответ: доказано.

4. Используем правила действий с дробями и упростим данное выражение. Имеем

$$\left(\frac{a+5}{5a-1}+\frac{a+5}{a+1}\right):\frac{a^2+5a}{1-5a}+\frac{a^2+5}{a+1}=$$

$$=\frac{(a+5)(a+1)+(a+5)(5a-1)}{(5a-1)(a+1)}:\frac{a(a+5)}{1-5a}+\frac{a^2+5}{a+1}=$$

$$=\frac{(a+5)(a+1+5a-1)}{(5a-1)(a+1)}\cdot\frac{1-5a}{a(a+5)}+\frac{a^2+5}{a+1}=$$

$$=\frac{(a+5)\cdot 6a\cdot(1-5a)}{(5a-1)(a+1)a(a+5)}+\frac{a^2+5}{a+1}=\frac{-6}{a+1}+\frac{a^2+5}{a+1}=$$

$$=\frac{-6+a^2+5}{a+1}=\frac{a^2-1}{a+1}=\frac{(a-1)(a+1)}{a+1}=a-1.$$

Ответ: $a-1$.

5. По условию решения x и y данного уравнения являются целыми числами. Поэтому числа $x-1$ и $y+3$ также целые. Так как левая часть уравнения $(x-1)(y+3)=7$ равна произведению двух целых чисел, то эти числа $x-1$ и $y+3$ являются делителями числа 7, стоящего в правой части. Поэтому надо рассмотреть четыре случая:

а) $\begin{cases} x-1=7, \\ y+3=1, \end{cases}$ решение этой системы $x=8$ и $y=-2$;

б) $\begin{cases} x-1=1, \\ y+3=7, \end{cases}$ решение этой системы $x=2$ и $y=4$;

в) $\begin{cases} x-1=-7, \\ y+3=-1, \end{cases}$ решение этой системы $x=-6$ и $y=-4$;

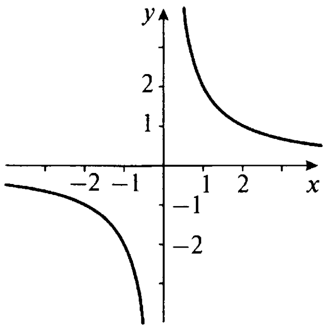
г) $\begin{cases} x-1=-1, \\ y+3=-7, \end{cases}$ решение этой системы $x=0$ и $y=-10$.

Ответ: (8; –2); (2; 4); (–6; –4); (0; –10).

6. Преобразуем данную функцию $y=\dfrac{16}{(x+2)^2-(x-2)^2}$, используя формулу разности квадратов. Получаем

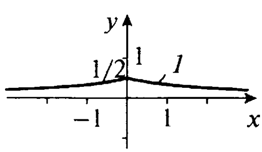
$$y=\frac{16}{(x+2+x-2)(x+2-x+2)}=\frac{16}{2x\cdot 4}=\frac{2}{x}.$$

Область определения этой функции – любые x, кроме $x = 0$. Функция $y = \frac{2}{x}$ – обратная пропорциональность. Графиком этой функции является гипербола, ветви которой расположены в I и III координатных четвертях.



Ответ: см. график.

7. Легко проверить, что функция $y = \frac{1}{|x| + 2}$ является четной. Поэтому график функции симметричен относительно оси ординат. При $x \geq 0$ по определению $|x| = x$ и функция имеет вид $y = \frac{1}{x + 2}$. Построим этот график при $x \geq 0$. В этом случае знаменатель $x + 2$ с увеличением x возрастает. Поэтому дробь $y = \frac{1}{x + 2}$ при этом убывает. При больших значениях x значение $y \approx 0$. Следовательно, прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота графика функции. При $x = 0$ значение $y = \frac{1}{2}$. Построим эту часть *1* графика и отразим ее симметрично относительно оси ординат.



Ответ: см. график.

8. Используем правила действий с дробями и формулы сокращенного умножения. Упростим данное выражение:

$$\left(\frac{a^2 - 2a + 4}{4a^2 - 1} \cdot \frac{2a^2 + a}{a^3 + 8} - \frac{a + 2}{2a^2 - a}\right) : \frac{4}{a^2 + 2a} - \frac{a + 4}{3 - 6a} =$$

$$=\left(\frac{\left(a^2-2a+4\right)\cdot a(2a+1)}{(2a-1)(2a+1)(a+2)\left(a^2-2a+4\right)}-\frac{a+2}{a(2a-1)}\right)\cdot\frac{a(a+2)}{4}+$$

$$+\frac{a+4}{6a-3}=\left(\frac{a}{(2a-1)(a+2)}-\frac{a+2}{a(2a-1)}\right)\cdot\frac{a(a+2)}{4}+\frac{a+4}{3(2a-1)}=$$

$$=\frac{a^2-(a+2)^2}{(2a-1)(a+2)a}\cdot\frac{a(a+2)}{4}+\frac{a+4}{3(2a-1)}=\frac{(a+a+2)(a-a-2)}{(2a-1)(a+2)a}\times$$

$$\times\frac{a(a+2)}{4}+\frac{a+4}{3(2a-1)}=\frac{(2a+2)\cdot(-2)\cdot a(a+2)}{(2a-1)(a+2)a\cdot 4}+\frac{a+4}{3(2a-1)}=$$

$$=\frac{-(a+1)}{2a-1}+\frac{a+4}{3(2a-1)}=\frac{-3(a+1)+a+4}{3(2a-1)}=\frac{-3a-3+a+4}{3(2a-1)}=$$

$$=\frac{1-2a}{3(2a-1)}=-\frac{1}{3}.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

9. В выражение $A=\dfrac{1+\dfrac{x-1}{x+3}}{2-\dfrac{x+1}{x-2}}$ входят дроби со знаменателями $x+3$ и $x-2$. Эти знаменатели не должны равняться нулю. Из этого условия находим $x\neq-3$ и $x\neq 2$. Упростим данное выражение:

$$A=\left(1+\frac{x-1}{x+3}\right):\left(2-\frac{x+1}{x-2}\right)=\frac{x+3+x-1}{x+3}:\frac{2(x-2)-(x+1)}{x-2}=$$

$$=\frac{2x+2}{x+3}:\frac{2x-4-x-1}{x-2}=\frac{2x+2}{x+3}:\frac{x-5}{x-2}=\frac{2(x+1)}{x+3}\cdot\frac{x-2}{x-5}=$$

$$=\frac{2(x+1)(x-2)}{(x+3)(x-5)}.$$

Полученная дробь имеет смысл при дополнительном условии: $x-5\neq 0$, откуда $x\neq 5$. Итак, область допустимых значений переменной – любые x, кроме $x=-3$, $x=2$ и $x=5$.

Выражение $A=0$, если числитель дроби $2(x+1)(x-2)=0$, а ее знаменатель при этом не равен нулю. Так как $x=2$ не входит в область допустимых значений, то приведенное равенство выполняется только при $x+1=0$, откуда $x=-1$.

Ответ: любые x, кроме $x=-3$, $x=2$ и $x=5$; $x=-1$.

10. Используя правила действий с дробями, в дроби $\dfrac{2n^2-n+3}{2n-1}$ выделим целую и дробную части:

$$\frac{2n^2-n+3}{2n-1}=\frac{2n^2-n}{2n-1}+\frac{3}{2n-1}=\frac{n(2n-1)}{2n-1}+\frac{3}{2n-1}=n+\frac{3}{2n-1}.$$

Так как n – целое число, то, для того чтобы данная дробь была целым числом, требуется, чтобы дробь $\frac{3}{2n-1}$ также была целым числом. Это возможно, если знаменатель дроби $2n-1$ будет делителем числителя 3. Поэтому надо рассмотреть четыре случая.

а) Если $2n-1=3$ (т. е. $n=2$), то дробь $A=2+\frac{3}{3}=3$;

б) если $2n-1=-3$ (т. е. $n=-1$), то дробь $A=-1+\frac{3}{-3}=-2$;

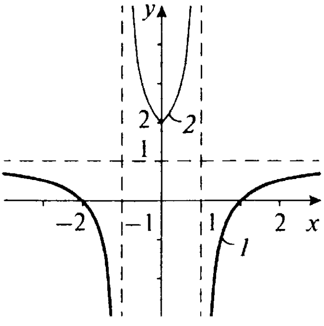
в) если $2n-1=1$ (т. е. $n=1$), то дробь $A=1+\frac{3}{1}=4$;

г) если $2n-1=-1$ (т. е. $n=0$), то дробь $A=0+\frac{3}{-1}=-3$.

Ответ: 2; –1; 1; 0.

11. Учтем, что функция $y=\frac{|x|-2}{|x|-1}$ четная и ее график симметричен относительно оси ординат. При $x\ge 0$ $|x|=x$ и функция имеет вид $y=\frac{x-2}{x-1}$.

Построим график этой функции для $x\ge 0$. График имеет вертикальную асимптоту $x=1$ и горизонтальную асимптоту $y=1$. График пересекает ось абсцисс в точке $x=2$ и ось ординат – в точке $y=2$. Учитывая эти характеристики, построим график функции $y=\frac{x-2}{x-1}$ в области $x\ge 0$. Он состоит из ветви гиперболы *1* и части ветви *2*. Построенный график симметрично отразим относительно оси ординат.



Ответ: см. график.

12. В левой части равенства сложим дроби, приведя их к общему знаменателю:

$$\frac{a}{x+5}+\frac{b}{(x-2)^2}=\frac{a}{x+5}+\frac{b}{x^2-4x+4}=\frac{a\left(x^2-4x+4\right)+b(x+5)}{(x+5)\left(x^2-4x+4\right)}=$$

$$=\frac{ax^2-4ax+4x+bx+5b}{x^3+x^2-16x+20}=\frac{ax^2+x(b-4a)+(4a+5b)}{x^3+x^2-16x+20}.$$

При этом в знаменателе дроби были умножены многочлены $x+5$ и x^2-4x+4. В числителе дроби многочлен записан в стандартном виде (т. е. в порядке убывания степеней x). Сравним полученную дробь и дробь $\dfrac{x^2+24}{x^3+x^2-16x+20}$, стоящую в правой части. Эти дроби имеют одинаковые знаменатели. Числители будут одинаковыми, если при одинаковых степенях x будут равные коэффициенты. Поэтому получаем $\begin{cases} a=1, \\ b-4a=0, \\ 4a+5b=24. \end{cases}$ Из первого уравнения имеем $a=1$, тогда из второго уравнения $b=4a=4$. Легко проверить, что значения $a=1$ и $b=4$ являются решением и третьего уравнения.

Ответ: $a=1$ и $b=4$.

13. Данное уравнение $x^2+2xy=3x+6y+2$ запишем в виде $(x^2+2xy)-(3x+6y)=2$ и разложим его левую часть на множители: $x(x+2y)-3(x+2y)=2$ или $(x+2y)(x-3)=2$. Так как по условию x и y – целые числа, то левая часть уравнения разложена на произведение целых чисел $x+2y$ и $x-3$, которые должны быть делителями правой части (числа 2). Надо рассмотреть четыре случая:

а) $\begin{cases} x+2y=2, \\ x-3=1, \end{cases}$ решение этой системы $x=4$ и $y=-1$ является целочисленным;

б) $\begin{cases} x+2y=1, \\ x-3=2, \end{cases}$ решение этой системы $x=5$ и $y=-2$ также является целочисленным;

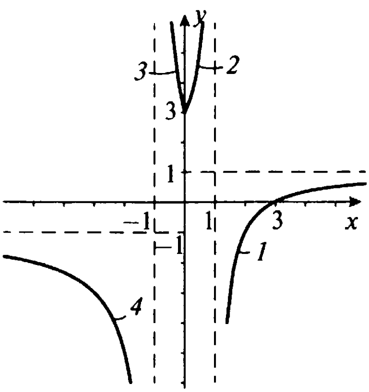
в) $\begin{cases} x+2y=-2, \\ x-3=-1, \end{cases}$ решение этой системы $x=2$ и $y=-2$ является целочисленным;

г) $\begin{cases} x + 2y = -1, \\ x - 3 = -2, \end{cases}$ решение этой системы $x = 1$ и $y = -1$ опять является целочисленным.

Итак, данное уравнение имеет четыре целочисленных решения.

Ответ: (4; –1); (5; –2); (2; –2); (1; –1).

14. Для построения графика функции $y = \dfrac{x-3}{|x|-1}$ надо раскрыть знак модуля, рассмотрев два случая. Если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и функция имеет вид $y = \dfrac{x-3}{x-1}$. Эта функция пересекает ось абсцисс в точке $x = 3$, ось ординат – в точке $y = 3$. Вертикальная асимптота $x = 1$, горизонтальная асимптота $y = 1$. Построим этот график в области $x \geq 0$. График состоит из ветви *1* гиперболы и части ветви *2*.



Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и функция имеет вид $y = \dfrac{x-3}{-x-1}$ или $y = \dfrac{3-x}{x+1}$. График в области $x < 0$ не пересекает ось абсцисс (и, естественно, ось ординат). Вертикальная асимптота $x = -1$, горизонтальная асимптота $y = -1$. В области $x < 0$ построим график этой функции. График состоит из части ветви *3* гиперболы и ветви *4*.

Ответ: см. график.

V. Подведение итогов урока

Глава II
КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

§ 4. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Данная тема – одна из важнейших в алгебре. Изучается она в основном в 5–6 классах школы, и в дальнейшем к ее изучению практически не возвращаются. В то же время по этой теме существует значительное количество самых разнообразных задач, которые часто встречаются на олимпиадах, при поступлении в физико-математические школы и институты. Школьники (и даже старших классов), как правило, большинство задач по этой теме, к сожалению, решить не могут. Поэтому остановимся на этом разделе достаточно подробно и рассмотрим те задачи, которые по силам учащимся 8 класса.

Урок 24. Рациональные числа

Цель: дать понятие о множестве рациональных чисел.

Планируемые результаты: получить представление о систематике чисел.

Тип урока: урок общеметодологической направленности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

План урока

1. Множества натуральных, целых и рациональных чисел.
2. Некоторые понятия теории множеств.
3. Обыкновенные дроби.
4. Десятичные дроби.

1. Множества натуральных, целых и рациональных чисел

В курсе математики вы уже рассматривали различные числа: натуральные, целые и дробные.

Числа, которые используются при счете предметов, называют *натуральными*: 1, 2, 3, ... Множество натуральных чисел обозначают буквой N (по первой букве латинского слова *naturalis* – естественный, природный).

Натуральные числа, числа, противоположные натуральным (–1, –2, –3, ...), и нуль (0) образуют множество *целых* чисел. Множество целых чисел обозначают буквой Z (по первой букве немецкого слова *Zahl* – число).

Кроме того, известны положительные и отрицательные *дробные* числа.

Целые и дробные числа составляют множество *рациональных* чисел. Это множество обозначают буквой Q (по первой букве французского слова *quotient* – отношение).

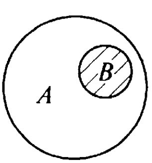
2. Некоторые понятия теории множеств

Теперь (и далее) нам понадобятся некоторые понятия и обозначения теории множеств, с которыми постепенно начнем знакомиться.

Набор элементов, собранных по определенному признаку, будем называть *множеством*, например, множество учеников 8 «А» класса данной школы, множество цифр (0, 1, 2, ..., 9), множество двузначных натуральных чисел (10, 11, 12, ..., 99) и т. д. Принадлежность элемента a множеству A записывают с помощью знака $\in$ – $a \in A$, например $17 \in N$; $-8 \in Z$; $\frac{3}{5} \in Q$; $-2{,}71 \in Q$. Если элемент b не принадлежит множеству A, то это записывают с помощью символа $\notin$, например $-5{,}3 \notin N$; $\frac{7}{4} \notin Z$.

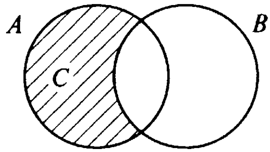
Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то множество B называют *подмножеством* множества A. Это записывают так: $B \subset A$ (читают: B – подмножество множества A), например $N \subset Z$; $Z \subset Q$.

Понятия, связанные с множествами, удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера.



Очевидно, что любая точка фигуры B является и точкой фигуры A. Пусть A – множество точек фигуры A, B – множество точек фигуры B. Тогда $B \subset A$.

Разностью множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B.



Например, разностью множества целых чисел Z и множества натуральных чисел N является множество, состоящее из всех целых отрицательных чисел и нуля.

3. Обыкновенные дроби

Любое рациональное число можно представить в виде обыкновенной дроби, причем разными способами.

Обыкновенной дробью называется число вида $\frac{m}{n}$ (где m – целое число, а n – натуральное). Например, $\frac{3}{8}, \frac{27}{15}, \frac{-5}{5}, \frac{-10}{2}$ – обыкновенные дроби. Число m называют *числителем* дроби, а число n – *знаменателем* дроби.

Всякое целое число можно также рассматривать как обыкновенную дробь со знаменателем 1, например $-7 = \frac{-7}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$, $5 = \frac{5}{1}$.

Напомним *основное свойство дробей*: если числитель и знаменатель данной дроби умножить или разделить на одно и то же (не равное нулю) число, то получится дробь, равная данной дроби.

Пример 1

Рассмотрим дробь $\frac{9}{15}$. Умножим ее числитель и знаменатель на число 2. Получаем дробь $\frac{9 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{18}{30}$. Эта дробь равна данной.

Разделим теперь числитель и знаменатель дроби $\frac{9}{15}$ на число (–3). Получаем дробь $\frac{9:(-3)}{15:(-3)} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$. Эта дробь также равна данной. Итак, имеем $\frac{9}{15} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$. Поэтому одну и ту же дробь можно представить в виде $\frac{m}{n}$ разными способами.

Обыкновенная дробь $\frac{m}{n}$ называется *правильной*, если $|m| < n$, и *неправильной*, если $|m| \ge n$.

Пример 2

а) Дробь $\frac{1}{3}$ правильная, так как $|1| = 1 < 3$.

б) Дробь $\frac{-7}{15}$ правильная, так как $|-7| = -(-7) = 7 < 15$.

в) Дробь $\frac{9}{8}$ неправильная, так как $|9| = 9 > 8$.

г) Дробь $\frac{-5}{5}$ неправильная, так как $|-5| = -(-5) = 5$.

д) Дробь $\frac{-11}{3}$ неправильная, так как $|-11| = -(-11) = 11 > 3$.

Неправильная дробь может быть записана в виде *смешанной* дроби, т. е. дроби, содержащей целую и дробную части, например $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$; $\frac{-5}{5} = -1$; $\frac{-11}{3} = -3\frac{2}{3}$.

Рассмотрим более сложные задачи этого раздела.

Пример 3

При каких целых значениях a дробь $A = \frac{a+5}{a+3}$ будет целым числом? Найдите такие числа A.

Выделим в числе A такое слагаемое в числителе, которое без остатка делится на знаменатель:

$$A = \frac{(a+3)+2}{a+3} = \frac{a+3}{a+3} + \frac{2}{a+3} = 1 + \frac{2}{a+3}.$$

Чтобы дробь A стала целым числом, необходимо, чтобы дробь $\frac{2}{a+3}$ стала целым числом. Так как a – целое число, то и число $(a + 3)$ целое. Поэтому $(a + 3)$ должно быть делителем числа 2. Число 2 имеет делители ± 1 и ± 2. Поэтому необходимо рассмотреть четыре случая:

а) $a + 3 = 1$, откуда $a = -2$ и $A = 1 + \frac{2}{1} = 3$;

б) $a + 3 = -1$, откуда $a = -4$ и $A = 1 + \frac{2}{-1} = -1$;

в) $a + 3 = 2$, откуда $a = -1$ и $A = 1 + \frac{2}{2} = 2$;

г) $a + 3 = -2$, откуда $a = -5$ и $A = 1 + \frac{2}{-2} = 0$.

Пример 4

Докажите, что сумма двух обыкновенных дробей также является обыкновенной дробью.

Запишем одну дробь в виде $\frac{m}{n}$, вторую – в виде $\frac{a}{b}$ (где m, a – целые числа; n, b – натуральные числа). Теперь найдем сумму этих дробей: $\frac{m}{n}+\frac{a}{b}=\frac{mb+na}{nb}=\frac{M}{N}$. Таким образом, сумму дробей удалось представить в виде $\frac{M}{N}$, где числитель $M = mn + na$ является целым числом (как произведение натуральных и целых чисел mb и na и их сумма), знаменатель $N = nb$ является натуральным числом (как произведение натуральных чисел n и b).

Таким образом, сумма двух обыкновенных дробей является обыкновенной дробью.

4. Десятичные дроби

Любую обыкновенную дробь можно записать в виде десятичной дроби, разделив «уголком» ее числитель на знаменатель.

Пример 5

Обратите в десятичную дробь: а) $\frac{3}{40}$; б) $\frac{59}{110}$.

а)
$$\begin{array}{r|l} 3 & 40 \\ \hline 300 & 0{,}075 \\ -280 & \\ \hline 200 & \\ -200 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r|l} 59 & 110 \\ \hline 590 & 0{,}536\ldots \\ -550 & \\ \hline 400 & \\ -330 & \\ \hline 700 & \\ -660 & \\ \hline 40 & \end{array}$$

В случае *а* была получена конечная десятичная дробь: $\frac{3}{40}=0{,}075$. В случае *б* видно, что после выполненного деления вновь получается остаток 40 и процесс деления будет неограниченно продолжаться (отмечено скобкой справа). Поэтому получаем: $\frac{59}{110}=0{,}5363636\ldots$ – бесконечную периодическую десятичную дробь. При этом повторяющаяся группа цифр называется *периодом*. Принято период указывать в скобках: $0{,}5\underbrace{36}_{\text{период}}36\ldots=0{,}5(36)$.

Учитывая, что конечная десятичная дробь не изменится, если после последней цифры записать любое количество нулей (например, 0,075 = 0,0750 = 0,07500 и т. д.), конечные десятичные дроби можно рассматривать как бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 0 (например, 0,075 = 0,075 (0)). Однако заметим, что период нуль никогда не указывается.

Таким образом, любая обыкновенная дробь $\frac{m}{n}$ может быть представлена единственным образом в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Справедливо также и обратное утверждение: любая бесконечная периодическая десятичная дробь может быть представлена единственным образом в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$.

На примере рассмотрим, как производится такое обращение.

Пример 6

Обратите в обыкновенную дробь: а) 1,6; б) 1,(15).

а) Сразу запишем данную дробь в виде обыкновенной и выполним сокращение: $1{,}6 = 1\frac{6}{10} = 1\frac{3}{5}$.

б) Обозначим данное число буквой $x = 1{,}(15) = 1{,}1515...$. Так как период этой дроби содержит две цифры, то умножим число x на $10^2 = 100$ и получим $100x = 115{,}1515...$. Теперь найдем разность чисел $100x$ и x: $100x - x = 99x = 115{,}1515... - 1{,}1515... = 114$. Для нахождения x получаем уравнение $99x = 114$, откуда $x = \frac{114}{99} = \frac{38}{33} = 1\frac{5}{33}$.

Проверить полученные результаты очень просто: надо опять обратить полученные обыкновенные дроби в десятичные:

а) $1\frac{3}{5} = \frac{8}{5}$ $\quad \begin{array}{r|l} -8 & 5 \\ \underline{5} & 1{,}6 \\ -30 & \\ \underline{30} & \\ 0 & \end{array}$

б) $1\frac{5}{33} = \frac{38}{33}$ $\quad \begin{array}{r|l} -38 & 33 \\ \underline{33} & 1{,}15... \\ -50 & \\ \underline{33} & \\ -170 & \\ \underline{165} & \\ 5 & \end{array}$

К сожалению, операции над бесконечными периодическими десятичными дробями выполнить намного сложнее. Самый простой способ решения таких задач: перевести эти дроби в обыкновенные и выполнить действия с ними.

Пример 7

Вычислить (1,(3) – 1,(6)) : 0,(21).

а) $x = 1,(3) = 1,333...$. Умножим это число на 10 и получим $10x = 13,333...$. Тогда $10x - x = 9x = 13,333... - 1,333... = 12$. Имеем $9x = 12$ и $x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

б) $x = 1,(6) = 1,666...$. Умножим и это число на 10: $10x = 16,666...$. Получаем $10x - x = 9x = 16,666... - 1,666... = 15$. Имеем $9x = 15$, и $x = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

в) $x = 0,(21) = 0,2121...$. Умножим это число на 100 и получим: $100x = 21,2121...$. Тогда $100x - x = 99x = 21,2121... - 0,2121... = 21$, откуда $99x = 21$ и $x = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$.

Теперь запишем этот пример для полученных обыкновенных дробей:

$$\left(1\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}\right) : \frac{7}{33} = -\frac{1}{3} : \frac{7}{33} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{33}{7} = -\frac{11}{7} = -1,(571428).$$

Таким образом, получаем дробь $-\frac{11}{7} = -1\frac{4}{7} = -1,(571428)$.

В заключение этого урока сделаем основной вывод: к рациональным числам относятся целые числа, обыкновенные дроби, конечные десятичные дроби и бесконечные десятичные дроби. Все рациональные числа можно представить в виде $\frac{m}{n}$ (где m — целое число, n — натуральное число). Множество рациональных чисел обозначают буквой Q.

Заметим, что разные бесконечные десятичные периодические дроби представляют разные рациональные числа. Исключением являются дроби с периодом 9, которые считают другой записью дробей с периодом 0.

Пример 8

а) $2,(9) = 2,99... = 3,00... = 3$; б) $2,37(9) = 2,3799... = 2,3800... = 2,38$.

Бесконечные десятичные дроби с периодом 9 заменяют дробями с периодом 0. При обращении обыкновенной дроби в десятичную не может получиться дробь с периодом 9.

III. Задания на уроке

№ 263; 264 (а, в); 265; 267 (а, б, е); 268 (г, д); 269.

IV. Контрольные вопросы

1. Какие числа относятся к рациональным?
2. В каком виде записываются рациональные числа?
3. Как обозначают множество рациональных чисел?

V. Творческие задания

1. Докажите, что сумма, разность, произведение, частное двух рациональных чисел также являются рациональными числами.

2. Запишите десятичную дробь в виде обыкновенной дроби: а) 1,(3); б) 2,(7); в) –3,(16); г) –5,(28); д) 6,5(21); е) 7,1(27); ж) 4,(163); з) 5,(234).

Ответы: а) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$; б) $\frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$; в) $-\frac{313}{99} = -3\frac{16}{99}$; г) $-\frac{523}{99} = -5\frac{28}{99}$; д) $\frac{6456}{990} = \frac{1076}{165} = 6\frac{86}{165}$; е) $\frac{7056}{990} = \frac{392}{55} = 7\frac{7}{55}$; ж) $\frac{4159}{999} = 4\frac{163}{999}$; з) $\frac{5229}{999} = \frac{581}{111} = 5\frac{26}{111}$.

Решение

а) Обозначим $x = 1,(3)$, тогда $10x = 13,(3)$ и $10x - x = 13,(3) - 1,(3) = 12$ или $9x = 12$, откуда $x = \frac{4}{3}$;

б) обозначим $x = 2,(7)$, тогда $10x = 27,(7)$ и $10x - x = 27,(7) - 2,(7)$ или $9x = 25$, откуда $x = \frac{25}{9}$;

в) обозначим $x = 3,(16)$, тогда $100x = 316,(16)$ и $100x - x = 316,(16) - 3,(16)$ или $99x = 313$, откуда $x = \frac{313}{99}$;

г) обозначим $x = 5,(28)$, тогда $100x = 528,(28)$ и $100x - x = 528,(28) - 5,(28)$ или $99x = 523$, откуда $x = \frac{523}{99}$;

д) обозначим $x = 6,5(21)$, тогда $1000x = 6521,(21)$ и $10x = 65,(21)$. Найдем $1000x - 10x = 6521,(21) - 65,(21)$ или $990x = 6456$, откуда $x = \frac{6456}{990}$;

е) обозначим $x = 7,1(27)$, тогда $1000x = 7127,(27)$ и $10x = 71,(27)$. Найдем $1000x - 10x = 7127,(27) - 71,(27) = 7056$, откуда $x = \frac{7056}{990}$;

ж) обозначим $x = 4,(163)$, тогда $1000x = 4163,(163)$. Найдем $1000x - x = 4163,(163) - 4,(163)$ или $999x = 4159$, откуда $x = \frac{4159}{999}$;

з) обозначим $x = 5,(234)$, тогда $1000x = 5234,(234)$. Найдем $1000x - x = 5234,(234) - 5,(234)$ или $999x = 5229$, откуда $x = \frac{5229}{999}$.

3. Выполните действия:

а) $3{,}6 \cdot (0{,}3) + 6{,}(4) : 2$;

б) $0{,}(6) - \frac{8}{23} \cdot \left(0{,}75 + 1{,}1(6)\right)$;

в) $2{,}8(3) - 1{,}2 \cdot 1{,}(1) + 1\frac{5}{7} : 1\frac{1}{7}$;

г) $5{,}(2) : (3 - 1{,}(1) \cdot 2{,}4) + 0{,}8$;

д) $3{,}1(3) + 1{,}4 : 0{,}(3) - 2{,}2$;

е) $4{,}8(3) - 0{,}625 - 2{,}25 \cdot 0{,}1(6)$.

Ответы: а) $4\frac{19}{45}$; б) 0; в) $2\frac{1}{4}$; г) $16\frac{7}{15}$; д) $5\frac{2}{15}$; е) $3\frac{5}{6}$.

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 264 (б, г); 266; 267 (в, г, и); 268 (в, е); 270.

Урок 25. Иррациональные числа

Цель: дать понятие об иррациональных числах и множестве действительных чисел.

Планируемые результаты: научиться извлекать квадратные корни из чисел, решать простейшие уравнения.

Тип урока: урок-лекция.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Какие числа относятся к рациональным?

2. Запишите десятичную дробь в виде обыкновенной:

а) 2,75; б) 0,(7); в) 0,(73).

3. Представьте в виде десятичной дроби число:

а) $\frac{1}{80}$; б) $\frac{5}{17}$.

4. Найдите: $|3 \cdot 2{,}8 - 11{,}6|$.

Вариант 2

1. В каком виде записываются рациональные числа?

2. Запишите десятичную дробь в виде обыкновенной:

а) 1,25; б) 0,(4); в) 0,(37).

3. Представьте в виде десятичной дроби число:

а) $\frac{1}{40}$; б) $\frac{3}{13}$.

4. Найдите: $|2 \cdot 3{,}7 - 10{,}9|$.

III. Работа по теме урока

План урока

1. Иррациональные числа.
2. Действительные числа.
3. Изображение действительных чисел на числовой оси.
4. Сравнение действительных чисел.

1. Иррациональные числа

Разумеется, кроме рациональных чисел, существуют и другие.

Пример 1

Рассмотрим десятичную бесконечную дробь 0,10110111... . В этом числе после запятой выписана цифра 1, потом 0, затем 11, потом 0, далее 111, потом 0 и т. д.

Эта дробь является бесконечной и непериодической, так как количество единиц все время увеличивается. Поэтому в этой дроби нет повторяющихся групп цифр. Следовательно, такое число (по определению) не может быть рациональным. Подобные числа называют *иррациональными* (приставка «ир» означает «не»).

Таким образом, иррациональное число – десятичная бесконечная непериодическая дробь. Иррациональное число нельзя представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, и наоборот: любое число, непредставимое в виде $\frac{m}{n}$, является иррациональным.

Пример 2

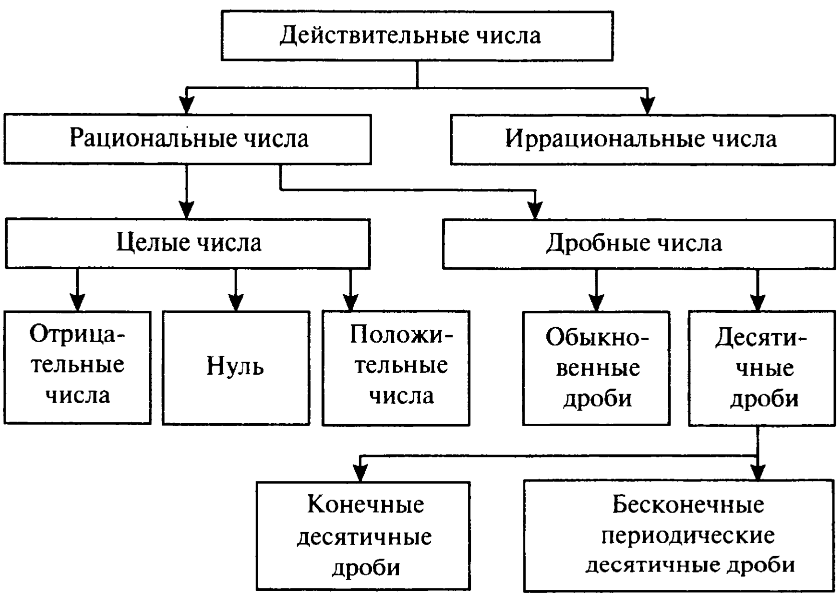
Докажем, что сторона a квадрата с площадью 3 является иррациональным числом.

Докажем от противного. Предположим, что число a – рациональное, т. е. его можно представить в виде несократимой дроби (у которой числитель и знаменатель – взаимно простые числа, по основному свойству дробей это всегда можно сделать, разделив числитель и знаменатель на их НОД). Тогда число a можно записать в виде $a = \frac{m}{n}$ $(n \neq 1)$. Площадь квадрата со стороной a есть $a^2 = \frac{m^2}{n^2}$ – несократимая дробь и не является натуральным числом (так как $n^2 \neq 1$ – натуральное число). С другой стороны, $a^2 = 3$ – натуральное число. Поэтому получаем противоречие: одно и то же число n^2 не может быть и несократимой дробью, и целым числом. Это противоречие свидетельствует о том, что число a не может быть рациональным, т. е. является числом иррациональным. Число a, которое является корнем уравнения $a^2 = 3$, обозначают символом $\sqrt{3}$. Таким образом, было доказано, что $\sqrt{3}$ – иррациональное число.

Иррациональные числа могут иметь различный вид: $\sqrt{3}$; $\operatorname{tg} 5^\circ$; $\sin\frac{\pi}{3}$; $\log_2 3$, π ($\pi \approx 3{,}1416...$ – отношение длины окружности к ее диаметру) и т. д.

2. Действительные числа

Совокупность рациональных и иррациональных чисел называют *действительными* числами. Множество действительных чисел обозначают буквой R, например $3{,}7 \in R$, $\sqrt{3} \in R$, $\sqrt{2} - \sqrt{7} \in R$, $\pi + 2 \in R$. На схеме представлена структура множества действительных чисел.

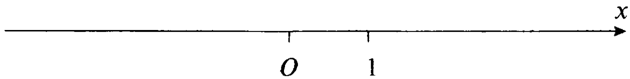


В математике приняты обозначения наиболее часто рассматриваемых множеств чисел:

множество натуральных чисел – N;
множество целых чисел – Z;
множество рациональных чисел – Q;
множество действительных чисел – R.

3. Изображение действительных чисел на числовой оси

Числовой осью называется прямая, на которой выбраны начало отсчета (точка O), положительное направление и масштаб.

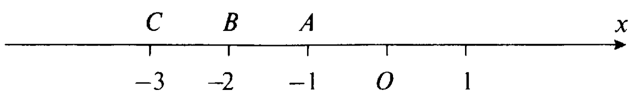


Тогда каждому действительному числу на оси Ox отвечает определенная точка. При этом положительные числа откладывают справа от точки O, отрицательные числа – слева. Также справедливо и обратное утверждение: любой точке на оси Ox отвечает определенное число.

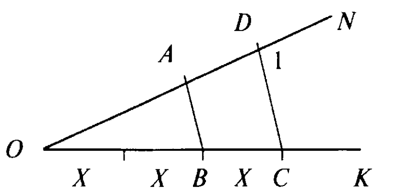
Пример 3

Отложите на числовой оси числа: а) -3; б) $-\frac{2}{3}$; в) $\sqrt{2}$.

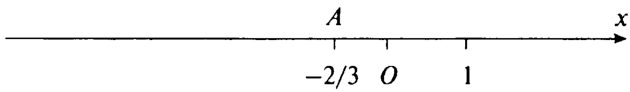
а) Возьмем числовую ось. С помощью циркуля раствором, равным единичному отрезку, слева от точки O отложим точку A. Очевидно, этой точке отвечает число (-1). Затем, не меняя раствора циркуля, от точки A влево откладываем точку B, которой отвечает число (-2). И наконец, также строим точку C, которой соответствует число (-3).



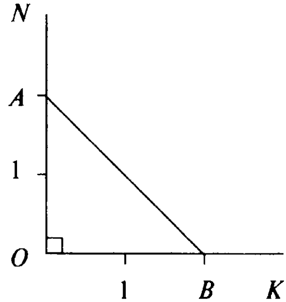
б) Воспользуемся теоремой Фалеса. Построим произвольный угол KON.



На стороне ON отложим с помощью циркуля отрезок OD, равный единичному отрезку. На стороне OK отложим три произвольных равных отрезка длиной X. Тогда $\frac{OB}{OC} = \frac{2X}{3X} = \frac{2}{3}$. Теперь соединим точки C и D и построим отрезок $AB \parallel CD$. Тогда по теореме Фалеса $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{2}{3}$. Учтем, что $OD = 1$, и получим $OA = \frac{2}{3}$. Затем возьмем числовую ось и с помощью циркуля перенесем отрезок OA слева от начала отсчета.



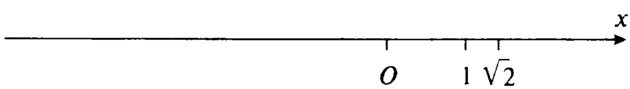
в) Воспользуемся теоремой Пифагора. Построим прямой угол KON и на его сторонах отметим единичные отрезки OA и OB.



Тогда по теореме Пифагора длина отрезка AB равна:

$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Теперь возьмем числовую ось и с помощью циркуля перенесем отрезок AB, отложив его справа от начала отсчета.



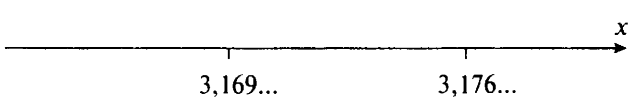
Из рассмотренного примера видно, что только с помощью циркуля и линейки без делений можно строить на числовой оси целые, рациональные и иррациональные числа.

4. Сравнение действительных чисел

Из двух действительных чисел больше то число, которое располагается правее на числовой оси. При этом бесконечные десятичные дроби сравнивают по тем же правилам, что и конечные десятичные дроби.

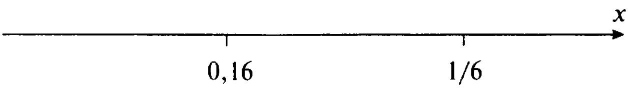
Пример 4

а) Сравним числа 3,176... и 3,169... . В этих положительных бесконечных десятичных дробях совпадают целые части и цифры десятых. Но в разряде сотых у первой дроби число единиц больше, чем у второй. Поэтому первая дробь больше второй, т. е. 3,176... > 3,169... (см. рисунок).

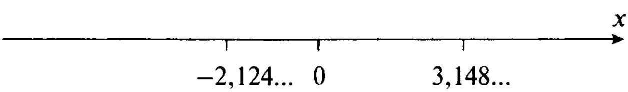


Следовательно, на числовой прямой первое число располагается правее второго.

б) Сравним числа 0,16 и $\frac{1}{6}$. Дробь $\frac{1}{6}$ запишем в виде бесконечной десятичной дроби $\frac{1}{6} = 0{,}1(6)$ и сравним десятичные дроби 0,16 и 0,1(6). У этих дробей совпадают целые части и цифры десятых и сотых. Однако у второй дроби цифра тысячных больше. Поэтому вторая дробь больше первой, т. е. $0{,}16 < 0{,}1(6)$, или $0{,}16 < \frac{1}{6}$.



в) Сравним числа 3,148... и –2,124... . Первое из этих чисел положительное, второе – отрицательное. Поэтому первое число больше, т. е. $3{,}148... > -2{,}124...$.



Действительные числа можно складывать, вычитать, умножать и делить (если делитель не равен нулю). Действия с действительными числами обладают теми же свойствами, что и действия с рациональными числами. При выполнении действий с действительными числами их заменяют приближенными значениями. Повышая точность приближенных значений, получают более точное значение результата.

Пример 5

Найдем приближенное значение суммы чисел $a = \frac{1}{3}$ и $b = 2{,}1437...$.

Запишем число a в виде десятичной дроби $a = 0{,}(3)$. Возьмем приближенные значения слагаемых с точностью до 0,1: $a \approx 0{,}3$ и $b \approx 2{,}1$. Тогда сумма $a + b \approx 0{,}3 + 2{,}1 = 2{,}4$. Если взять более точные приближенные значения слагаемых с точностью до 0,01 (т. е. $a \approx 0{,}33$ и $b \approx 2{,}14$), то получим более точное значение суммы: $a + b \approx 0{,}33 + 2{,}14 = 2{,}47$.

Пример 6

Найдем длину окружности и площадь круга радиуса $R = 3$ м.

Возьмем приближенное значение $\pi \approx 3{,}14$. Длина окружности l находится по формуле $l = 2\pi R$. Поэтому получаем $l \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 = 18{,}84$ (м). Площадь круга S находится по формуле $S = \pi R^2$. Поэтому имеем $S = 3{,}14 \cdot 3^2 = 28{,}26$ (м^2).

IV. Задания на уроке

№ 276; 278; 280 (а, в); 281 (г–е); 284 (а); 286; 288; 293.

V. Контрольные вопросы

1. Какие числа называются иррациональными? Приведите примеры.
2. Какие числа образуют множество действительных чисел? Как обозначают множество действительных чисел?
3. Структура множества действительных чисел (схема).
4. Какие действительные числа можно и какие нельзя представить в виде отношения $\frac{m}{b}$ (где m – целое число, n – натуральное число)?
5. Изображение действительных чисел на числовой оси.
6. Сравнение действительных чисел.

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 277; 279; 280 (б, г); 281 (а–в); 284 (б); 285; 289; 292.

§ 5. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

Урок 26. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень

Цель: рассмотреть понятие квадратных корней и понятие арифметического квадратного корня.

Планируемые результаты: научиться извлекать квадратные корни из чисел, решать простейшие уравнения.

Тип урока: урок-лекция.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

План урока

1. Понятие квадратного корня.
2. Решение простейших уравнений.

1. Понятие квадратного корня

Пример 1

Найдем длину стороны квадрата, если его площадь равна 100 м^2.

Пусть длина стороны квадрата равна x (м). Тогда площадь квадрата равна x^2 ($м^2$). По условию эта площадь составляет 100 $м^2$. Получаем уравнение $x^2 = 100$. Запишем его в виде $x^2 - 100 = 0$ и по формуле разности квадратов разложим левую часть на множители: $x^2 - 10^2 = 0$ или $(x + 10)(x - 10) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x + 10 = 0$ (его корень $x = -10$) и $x - 10 = 0$ (корень $x = 10$). Таким образом, уравнение $x^2 = 100$ имеет два корня: $x = -10$ и $x = 10$. Квадраты обоих чисел равны 100, поэтому оба числа называются квадратными корнями из числа 100. Так как длина стороны квадрата не может выражаться отрицательным числом, то условию задачи удовлетворяет только один из корней уравнения – $x = 10$. Итак, длина стороны квадрата 10 м.

Квадратным корнем из неотрицательного числа a называют число b, квадрат которого равен числу a. В рассмотренном примере числа 10 и -10 были квадратными корнями из положительного числа 100, так как и $10^2 = 100$, и $(-10)^2 = 100$.

Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b, квадрат которого равен числу a. Арифметический квадратный корень обозначается символом $\sqrt{}$. Таким образом, $b = \sqrt{a}$, если выполнено соотношение $b^2 = a$ $(a,\ b \geq 0)$.

Символ $\sqrt{}$ называют *знаком арифметического квадратного корня*; выражение, стоящее под знаком корня, называют *подкоренным выражением*. Запись $\sqrt{a}$ читают: квадратный корень из a (слово «арифметический» при этом опускают).

Пример 2

а) $\sqrt{81} = 9$, так как число $b = 9$, возведенное в квадрат, дает число $a = 81$, т. е. $9^2 = 81$.

б) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, так как число $b = \frac{1}{2}$ в квадрате дает число $a = \frac{1}{4}$, т. е. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

в) $\sqrt{0} = 0$, так как число $b = 0$ при возведении в квадрат дает число $a = 0$, т. е. $0^2 = 0$.

г) $\sqrt{-4}$ не имеет смысла, так как не существует такого числа b, квадрат которого равнялся бы числу $a = -4$, т. е. уравнение $b^2 = -4$ не имеет решения.

д) $\sqrt{c^4} = c^2$, так как число $b = c^2$ при возведении в квадрат дает число $a = c^4$, т. е. $(c^2)^2 = c^4$.

Из рассмотренного примера видно, что операция извлечения квадратного корня из числа обратна операции возведения числа в квадрат.

Обратите внимание на то, что арифметическим квадратным корнем всегда является неотрицательное число.

Пример 3

$\sqrt{9} = 3$ – арифметический квадратный корень, так как $b = 3 \geq 0$ и $b^2 = (3)^2 = 9 = a$.

Заметим, что нельзя считать $\sqrt{9} = -3$ арифметическим квадратным корнем, хотя и выполняется соотношение $b^2 = (-3)^2 = 9 = a$. Однако $b = -3 < 0$, и это значение b не арифметический квадратный корень.

Из рассмотренного примера следует, что $\sqrt{a^2} = |a|$, так как арифметический квадратный корень должен быть числом неотрицательным.

Пример 4

а) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = -(-5) = 5$, так как $(-5) < 0$.

б) $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} = \left|1-\sqrt{3}\right| = -\left(1-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}-1$, так как число $1-\sqrt{3} < 0$.

в) $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2} + 4 = \left|1-\sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{3}-2\right| + 4 = -\left(1-\sqrt{3}\right) - \left(\sqrt{3}-2\right) + 4 = -1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 2 + 4 = 5$. Здесь учтено, что числа $\left(1-\sqrt{3}\right)$ и $\left(\sqrt{3}-2\right)$ отрицательные.

г) $\sqrt{(c-3)^2} = |c-3| = \begin{cases} c-3, \text{если } c-3 \geq 0, \\ -(c-3), \text{если } c-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} c-3, \text{если } c \geq 3, \\ 3-c, \text{если } c < 3. \end{cases}$

Здесь по определению раскрыт модуль числа $(c-3)$.

Таким образом, число b является арифметическим квадратным корнем из числа a (т. е. $b = \sqrt{a}$), если выполнены два условия: 1) $b \geq 0$ и 2) $b^2 = a$.

При $a < 0$ выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла. Очевидно, что если подставить величину $b = \sqrt{a}$ в условие 2, то получим тождество $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ (справедливое при допустимых значениях a, т. е. при $a \geq 0$).

2. Решение простейших уравнений

С понятием арифметического квадратного корня связаны простейшие иррациональные уравнения и неравенства.

Пример 5

Решим уравнение $2\sqrt{4x-3}-8=0$.

Запишем данное уравнение в виде $2\sqrt{4x-3}=8$ и разделим обе части на число 2. Получим равносильное уравнение $\sqrt{4x-3}=4$. По определению арифметического квадратного корня имеем: $4x-3=4^2$ или $4x-3=16$. Решим это линейное уравнение и получим $4x=19$, и $x=\frac{19}{4}=4\frac{3}{4}$.

Пример 6

Решим уравнение $\sqrt{x+2}=x$.

По свойству арифметического квадратного корня $x \geq 0$ и $x^2=x+2$. Решим полученное квадратное уравнение, записав его в виде $x^2-x-2=0$. Разложим левую часть уравнения на множители: $(x^2-2x)+(x-2)=0$, или $x(x-2)+(x-2)=0$, или $(x-2)(x+1)=0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x-2=0$ (его корень $x=2$) и $x+1=0$ (корень $x=-1$). Итак, квадратное уравнение $x^2-x-2=0$ имеет два корня: $x=2$ и $x=-1$. Однако условию $x \geq 0$ удовлетворяет только корень $x=2$. Поэтому данное уравнение $\sqrt{x+2}=x$ имеет единственное решение – $x=2$.

Пример 7

Решим уравнение $(x+2)(x-6)\sqrt{x-5}=0$.

Произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а остальные множители при этом имеют смысл. Выражения $x+2$ и $x-6$ имеют смысл при любом значении x. Выражение $\sqrt{x-5}$ имеет смысл только при $x-5 \geq 0$, т. е. $x \geq 5$. Поэтому решения данного уравнения должны быть не меньше числа 5, т. е. $x \geq 5$.

Первый множитель $x+2$ в данном уравнении равен нулю при $x=-2$. Однако это решение не удовлетворяет условию $x \geq 5$ и не является корнем данного уравнения. Второй множитель $x-6$ равен нулю при $x=6$. Это число удовлетворяет условию $x \geq 5$ и является корнем данного уравнения. Третий множитель $\sqrt{x-5}$ равен нулю, если $x-5=0^2$ или $x-5=0$, откуда $x=5$. Это число также удовлетворяет условию $x \geq 5$ и также является корнем данного уравнения. Итак, данное уравнение имеет два решения: $x=6$ и $x=5$.

Пример 8

Решим неравенство $\sqrt{x-3} > -7$.

По определению арифметического квадратного корня выражение $\sqrt{x-3} \geq 0$, т. е. левая часть неравенства неотрицательна.

Правая часть неравенства – отрицательное число –7. Очевидно, что неравенство будет верным при условии, что оно вообще имеет смысл. Неравенство имеет смысл, если имеет смысл выражение $\sqrt{x-3}$. Это выражение имеет смысл, если подкоренное выражение $x - 3 \geq 0$, т. е. $x \geq 3$. Итак, решение данного неравенства – все числа x, которые не меньше числа 3 (т. е. $x \geq 3$).

III. Задания на уроке

№ 298 (а, в); 299 (б, г); 300 (а, в, д); 302 (б); 304 (б, г, е); 305 (а, д); 307 (б); 308 (а); 311 (а, г); 314 (а, б).

IV. Контрольные вопросы

1. Дайте определение квадратного корня.
2. Дайте определение арифметического квадратного корня.
3. При каких условиях $\sqrt{a} = b$?
4. Для каких значений a выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл?

V. Творческие задания

1. Решите уравнение:

а) $5\sqrt{3x-4} = 0$; д) $\sqrt{2x+3} = x$;

б) $2\sqrt{4x+3} = 0$; е) $\sqrt{2x+1} = x-1$;

в) $2\sqrt{5x-3} = 1$; ж) $(x^2-4)\sqrt{x-1} = 0$;

г) $3\sqrt{2-3x} = 2$; з) $(9-4x^2)\sqrt{x-1} = 0$.

Ответы: а) $\frac{4}{3}$; б) $-\frac{3}{4}$; в) $\frac{13}{20}$; г) $\frac{14}{27}$; д) 3; е) 4; ж) 1 и 2; з) 1 и 1,5.

2. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x-3} \geq -2$; ж) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} > -1{,}8$;

б) $\sqrt{x+5} \geq -7$; з) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} \geq -2{,}6$;

в) $5\sqrt{x+1} > -2$; и) $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+3} \leq 0$;

г) $4\sqrt{x-2} > -3$; к) $2\sqrt{2x-3} + 4\sqrt{4x-6} \leq 0$;

д) $\sqrt{x+2} \leq 0$; л) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2} \leq 0$;

е) $\sqrt{x-3} \leq 0$; м) $2\sqrt{x+5} + 3\sqrt{x-4} \leq 0$.

Ответы: а) $x \geq 3$; б) $x \geq -5$; в) $x \geq -1$; г) $x \geq 2$; д) $x = -2$; е) $x = 3$; ж) $x \geq 3$; з) $x \geq 1$; и) $x = -1$; к) $x = 1{,}5$; л) решений нет; м) решений нет.

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 298 (б, г); 299 (а, в); 300 (б, г, е); 302 (а); 304 (а, в, д); 305 (б, г); 307 (а); 308 (б); 311 (б, е); 315.

Урок 27. Уравнение $x^2 = a$

Цель: рассмотреть решение простейшего квадратного уравнения.

Планируемые результаты: научиться решать и исследовать простейшие квадратные уравнения.

Тип урока: урок изучения нового материала.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\sqrt{196}$; б) $\sqrt{0{,}81}$; в) $\sqrt{\dfrac{16}{121}}$.

2. Решите уравнение и неравенство:

а) $2\sqrt{5x+2} = 0$; б) $3\sqrt{1-2x} = 2$; в) $\sqrt{3x-5} \le 0$; г) $\sqrt{4x-3} \ge -1$.

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\sqrt{225}$; б) $\sqrt{0{,}64}$; в) $\sqrt{\dfrac{25}{81}}$.

2. Решите уравнение и неравенство:

а) $3\sqrt{4-3x} = 0$; б) $2\sqrt{3x-1} = 3$; в) $\sqrt{5-2x} \le 0$; г) $\sqrt{6+5x} \ge -2$.

III. Работа по теме урока

Рассмотрим простейшее квадратное уравнение $x^2 = a$ (где a – произвольное число). В зависимости от числа a при решении этого уравнения возможен один из трех случаев.

1. Если $a < 0$, то данное уравнение корней не имеет. Действительно, для любого числа x левая часть уравнения $x^2 \ge 0$, а правая часть – число $a < 0$. Получаем противоречие: неотрицательная величина не может равняться отрицательному числу.

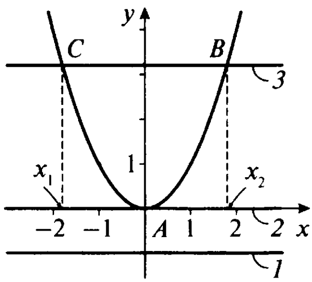
2. Если $a = 0$, то уравнение имеет единственный корень, равный нулю (т. е. корень $x = 0$). Только для числа $x = 0$ величина $x^2 = 0$ и уравнение обращается в верное равенство.

3. Если $a > 0$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = -\sqrt{a}$ и $x_2 = \sqrt{a}$. Действительно, при подстановке в данное уравнение числа $-\sqrt{a}$ получаем $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = (-1)^2 \cdot \left(\sqrt{a}\right)^2 = 1 \cdot a = a$ (верное ра-

венство), при подстановке значения $\sqrt{a}$ имеем $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ (также верное равенство).

Три возможных случаях решения уравнения $x^2 = a$ имеют простую графическую иллюстрацию. Построим график функции $y_1 = x^2$ (парабола). Для различных значений a построим график функции $y_2 = a$ (прямая, параллельная оси абсцисс).

При $a < 0$ прямая y_2 (прямая *1*) расположена ниже оси абсцисс и не имеет с параболой y_1 общих точек. Поэтому данное уравнение решений не имеет.



При $a = 0$ прямая y_2 (прямая *2*) совпадает с осью абсцисс и имеет с параболой y_1 одну общую точку A, абсцисса которой $x = 0$. Поэтому данное уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

При $a > 0$ прямая y_2 (прямая *3*) расположена выше оси абсцисс и пересекает параболу y_1 в двух точках: B и C. Так как парабола y_1 симметрична относительно оси ординат, то точки B и C также симметричны относительно оси ординат. Пусть абсциссы этих точек x_2 и x_1 соответственно. Так как x_2 есть положительное число, квадрат которого равен a, то x_2 является арифметическим квадратным корнем из a, т. е. $x_2 = \sqrt{a}$. Так как x_1 есть число, противоположное x_2, то $x_1 = -\sqrt{a}$.

Пример 1

а) Уравнение $x^2 = 16$ имеет два корня: $x_1 = -\sqrt{16} = -4$ и $x_2 = \sqrt{16} = 4$.

б) Уравнение $x^2 = 3$ также имеет два корня: $x_1 = -\sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{3}$. Эти корни являются иррациональными числами, так как не существует рационального числа, квадрат которого равен 3 (доказательство было приведено ранее).

Пример 2

Решим уравнение $(x - 2)^2 = 6{,}25$.

Обозначим буквой Z величину $x - 2$ (т. е. $Z = x - 2$) и получим простейшее квадратное уравнение $Z^2 = 6{,}25$. Это уравнение имеет два корня: $Z_1 = -\sqrt{6{,}25} = -2{,}5$ и $Z_2 = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$. Теперь вернемся к старой неизвестной x и получим два линейных уравнения: $x - 2 = -2{,}5$ (его корень $x_1 = -0{,}5$) и $x - 2 = 2{,}5$ (его корень $x_2 = 4{,}5$). Итак, данное уравнение имеет два корня: $x_1 = -0{,}5$ и $x_2 = 4{,}5$.

Пример 3

Решим уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Ранее такие квадратные уравнения мы решали разложением левой части на множители. Используем теперь для решения другой способ – выделение полного квадрата разности. Рассмотрим первых два слагаемых $x^2 - 6x$ в левой части уравнения и запишем их в виде $x^2 - 2 \cdot x \cdot 3$, т. е. квадрат первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе (в качестве второго числа возьмем число 3). Если добавить (соответственно, и вычесть) квадрат второго числа $3^2 = 9$, то получим полный квадрат разности: $(x^2 - 6x + 9) - 9 + 5 = 0$, или $(x - 3)^2 - 4 = 0$, или $(x - 3)^2 = 4$. Далее уравнение решается аналогично предыдущему. Получаем два линейных уравнения: $x - 3 = -2$ (его корень $x_1 = 1$) и $x - 3 = 2$ (корень $x_2 = 5$). Итак, уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$.

Пример 4

Определим число корней уравнения $x^2 + 4x + c = 0$ (где c – произвольное число).

Для анализа этого уравнения также используем способ выделения полного квадрата суммы. Для этого в левой части уравнения добавим (и вычтем) число 4. Получаем $(x^2 + 4x + 4) + c - 4 = 0$ или $(x + 2)^2 = 4 - c$. С помощью обозначений $Z = x + 2$ и $a = 4 - c$ это уравнение сводится к простейшему квадратному уравнению $Z^2 = a$.

При $a < 0$ или $4 - c < 0$ (т. е. $c > 4$) это (и данное) уравнение корней не имеет.

При $a = 0$ или $4 - c = 0$ (т. е. $c = 4$) уравнение имеет один корень.

При $a > 0$ или $4 - c > 0$ (т. е. $c < 4$) уравнение $Z^2 = a$ имеет два корня: Z_1 и Z_2. Вернувшись к старой неизвестной $Z = x + 2$, получаем, что и данное уравнение имеет два корня: x_1 и x_2.

Заметим, что в задачах с параметрами ответ принято записывать в порядке возрастания параметра. Поэтому в рассмотренном примере ответ имеет вид: при $c < 4$ два корня, при $c = 4$ один корень, при $c > 4$ нет корней.

IV. Задания на уроке

№ 319 (а, в); 321 (б); 322 (а, д); 324 (а, в); 325; 328; 329 (в, е); 331 (а, б).

V. Контрольные вопросы

1. Возможные случаи решения уравнения $x^2 = a$.
2. Графическое решение уравнения $x^2 = a$ (три случая).

VI. Творческие задания

1. Решите уравнение:

а) $x^2 - 4x + 3 = 0$; д) $\sqrt{3x^2 + 1} = 2$;

б) $x^2 + 6x + 5 = 0$; е) $\sqrt{4x^2 + 9} = 5$;

в) $-x^2 + 2x + 3 = 0$; ж) $\sqrt{x - 2} = 2 - x$;

г) $-x^2 + 6x - 8 = 0$; з) $\sqrt{2x - 3} = 6 - 4x$.

Ответы: а) $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$; б) $x_1 = -1$ и $x_2 = -5$; в) $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$; г) $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$; д) $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$; е) $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$; ж) $x = 2$; з) $x = 1{,}5$.

2. Определите число корней уравнения:

а) $x^2 - 6x + a = 0$; г) $x^2 + 4x - a - 2 = 0$;

б) $4x^2 + 8x + a = 0$; д) $x^2 + 6ax + 9a^2 - 3a = 0$;

в) $x^2 - 2x - a + 3 = 0$; е) $x^2 - 4ax + 4a^2 - 2a + 4 = 0$

Ответы: а) при $a < 9$ 2 корня, при $a = 9$ 1 корень, при $a > 9$ нет корней;

б) при $a < 4$ 2 корня, при $a = 4$ 1 корень, при $a > 4$ нет корней;

в) при $a < 2$ нет корней, при $a = 2$ 1 корень, при $a > 2$ 2 корня;

г) при $a < -6$ нет корней, при $a = -6$ 1 корень, при $a > -6$ 2 корня;

д) при $a < 0$ нет корней, при $a = 0$ 1 корень, при $a > 0$ 2 корня;

е) при $a < 2$ нет корней, при $a = 2$ 1 корень, при $a > 2$ 2 корня.

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 319 (б, г); 321 (а); 322 (в, г); 324 (б, г); 326; 329 (г, д); 331 (в, г).

Урок 28. Нахождение приближенных значений квадратного корня

Цель: сформировать представление о приближенном вычислении квадратного корня.

Планируемые результаты: научиться вычислять приближенное значение корня из числа.

Тип урока: урок-исследование.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $x^2 - 0{,}04 = 0{,}6$; б) $(2x - 3)^2 = 16$; в) $(3x + a)^2 = 81$.

2. Определите число корней уравнения $x^2 - 4x = a$.

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $x^2 + 0{,}05 = 0{,}3$; б) $(3x + 2)^2 = 36$; в) $(2x - a)^2 = 49$.

2. Определите число корней уравнения $-x^2 + 6x = a$.

III. Работа по теме урока

На предыдущих занятиях мы узнали, что $\sqrt{a}$ может быть целым числом (например, $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{9} = 3$ и т. д.), обыкновенной дробью (например, $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$, $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$ и т. д.), десятичной дробью (например, $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$, $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$ и т. д.) и иррациональным числом (например, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4{,}5}$ и т. д.). Так как иррациональное число является бесконечной десятичной непериодической дробью, то при практических вычислениях возникает вопрос о вычислении приближенного значения арифметического квадратного корня.

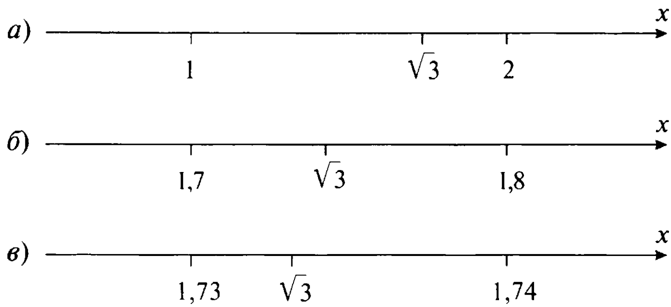
Пример 1

Найдем приближенное значение $\sqrt{3}$ с двумя знаками после запятой.

Оценим подкоренное выражение 3 сначала в целых числах. Так как $1 < 3 < 4$, то $\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$ или $1 < \sqrt{3} < 2$. Поэтому десятичная запись числа $\sqrt{3}$ начинается с цифры 1, т. е. $\sqrt{3} \approx 1,\ldots$ (рис. *а*).

Найдем теперь цифру десятых. Для этого будем возводить в квадрат десятичные дроби 1,1; 1,2; 1,3... до тех пор, пока вновь не оценим такими числами подкоренное выражение 3. Имеем $1{,}1^2 = 1{,}21$; $1{,}2^2 = 1{,}44$; $1{,}3^2 = 1{,}69$; $1{,}4^2 = 1{,}96$; $1{,}5^2 = 2{,}25$; $1{,}6^2 = 2{,}56$; $1{,}7^2 = 2{,}89$; $1{,}8^2 = 3{,}24$. Так как $2{,}89 < 3 < 3{,}24$ или $1{,}7^2 < 3 < 1{,}8^2$, то $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$. Значит, $\sqrt{3} \approx 1{,}7\ldots$ (рис. *б*).

Чтобы найти цифру сотых, будем последовательно возводить в квадрат десятичные дроби 1,71; 1,72; 1,73..., вновь оценивая подкоренное выражение 3. Имеем: $1{,}71^2 = 2{,}9241$; $1{,}72^2 = 2{,}9584$; $1{,}73^2 = 2{,}9929$; $1{,}74^2 = 3{,}0276$. Так как $1{,}73^2 < 3 < 1{,}74^2$, то $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$ (рис. *в*). Поэтому $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.



Аналогичным образом можно найти приближенное значение арифметического квадратного корня с любой заданной точностью.

При практических расчетах для нахождения приближенных значений квадратных корней используют специальные таблицы или вычислительную технику.

Пример 2

С помощью калькулятора найдем $\sqrt{27{,}4}$.

Введем в калькулятор число 27,4 и нажмем клавишу $\sqrt{\ }$. На экране появится число 5,234500931 – приближенное значение $\sqrt{27{,}4}$. Полученный результат округляют до требуемого количества знаков. Округлим, например, этот результат до сотых и получим $\sqrt{27{,}4} \approx 5{,}23$.

IV. Задания на уроке

№ 336 (а, г); 338 (б); 339 (а); 340 (б); 344 (а, б); 345 (а); 348 (б, г).

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 336 (в, е); 338 (а); 339 (б); 340 (а); 344 (в, г); 345 (б); 348 (а, в).

Уроки 29, 30. Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график

Цель: рассмотреть функцию $y = \sqrt{x}$, ее свойства и график.

Планируемые результаты: знать основные свойства и график функции $y = \sqrt{x}$.

Тип уроков: уроки-практикумы.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

Пример 1

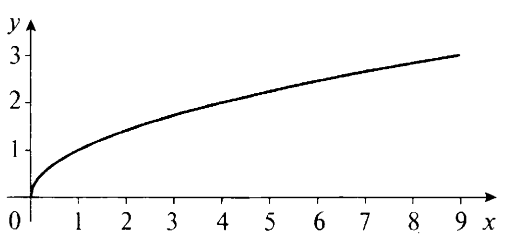
Пусть длина стороны квадрата равна a (см), а его площадь – S (см^2). Величины S и a связаны соотношением $S = a^2$ (где $a \neq 0$). Это равенство означает, что каждому значению стороны квадрата a соответствует единственное значение его площади S. Из равенства $S = a^2$ найдем $a = \sqrt{S}$. Такое соотношение означает, что для каждого значения площади квадрата S можно указать единственное значение его стороны a. Формулами $S = a^2$ (где $a \geq 0$) и $a = \sqrt{S}$ задаются функциональные зависимости между одними и теми же переменными a и S. Однако в первом случае независимой переменной (аргументом) является сторона квадрата a, зависимой переменной (значением функции) – его площадь S. Во втором случае, наоборот, независимой переменной (аргументом) является площадь квадрата S, зависимой переменной (значением функции) – его сторона a. Заметим, что функции $S = a^2$ (где $a \geq 0$) и $a = \sqrt{S}$ являются *взаимообратными*.

Пример 2

Если в предыдущем примере в каждом случае обозначить, как принято, независимую переменную буквой x, а зависимую переменную – буквой y, то получим взаимообратные функции $y = x^2$ (где $x \geq 0$) и $y = \sqrt{x}$. Сравним свойства и графики этих функций.

Сначала составим таблицу значений функции $y = \sqrt{x}$ и построим ее график.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3



Приведем основные свойства функции $y = \sqrt{x}$.

1. Область определения функции – значения $x \geq 0$.
2. Область изменения (значений) функции – значения $y \geq 0$.

3. График функции пересекает оси координат в начале системы координат.

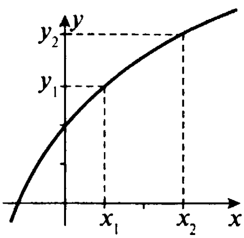
4. Значения функции $y \geq 0$ при $x \geq 0$, и график расположен в первой координатной четверти.

5. Функция монотонно возрастает.

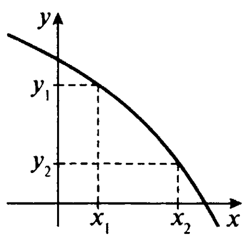
Дадим определение *монотонной* функции. Пусть числа x_1 и x_2 принадлежат области определения функции и значения функции в этих точках y_1 и y_2 соответственно. Пусть (для определенности) $x_2 > x_1$. Если при этом для всех таких значений x_1 и x_2:

1) $y_2 > y_1$ (т. е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции), то функция возрастает (график идет вверх);

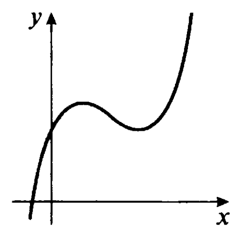
2) $y_2 < y_1$ (т. е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции), то функция убывает (график идет вниз).



Функция возрастает ($y_2 > y_1$)



Функция убывает ($y_2 < y_1$)



Немонотонная функция

Функция $y = x^2$, ее свойства и график были изучены в 7 классе. Напомним основные свойства этой функции при $x \geq 0$.

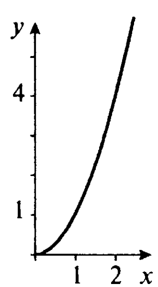
1. Область определения функции – значения $x \geq 0$.

2. Область изменения (значений) функции – значения $y \geq 0$.

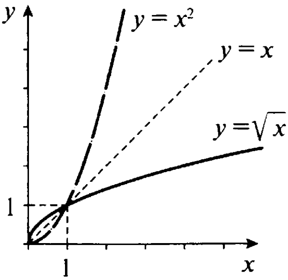
3. График функции пересекает оси координат в начале системы координат.

4. Значения функции $y \geq 0$ при $x \geq 0$, и график расположен в первой координатной четверти.

5. Функция монотонно возрастает.



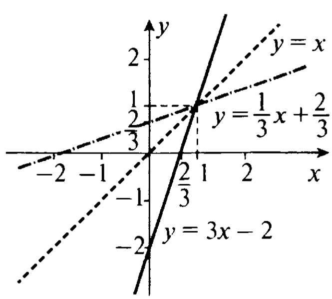
Заметим, что графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ (где $x \geq 0$) симметричны относительно прямой $y = x$ (биссектрисы первого и третьего координатных углов). Доказательства этого факта, а также свойства взаимообратных функций мы в 8 классе приводить не будем.



Пример 3

Для линейной функции $y = 3x - 2$ найдем обратную, построим графики этих функций и убедимся, что они симметричны относительной прямой $y = x$.

Переменные y и x связаны соотношением $y = 3x - 2$, что позволяет для любого значения x вычислить соответствующее значение y. Теперь из того же соотношения $y = 3x - 2$ выразим x: $3x = y + 2$ и $x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$. Теперь можно по любому значению y найти соответствующее ему значение y, т. е. x является функцией y. Так как принято независимую переменную обозначать буквой x, а зависимую — буквой y, то в выражении $x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$ поменяем x на y, а y на x. Получаем функцию $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Эта функция является обратной для данной функции $y = 3x - 2$.



Видно, что эти графики симметричны относительной прямой $y = x$. На основании рисунка приведем еще некоторые свойства взаимообратных функций.

1. Монотонность таких функций одинакова. Из рисунка видно, что обе функции возрастают.

2. Если график данной функции пересекает ось абсцисс в точке $x = a$ и ось ординат – в точке $y = b$, то график обратной функции, наоборот, пересекает ось абсцисс в точке $x = b$ и ось ординат – в точке $y = a$. Из рисунка видно, что точки пересечения графика функции $y = 3x - 2$ с осями координат $x = \frac{2}{3}$ и $y = -2$. Точки пересечения графика обратной функции $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ с осями координат, наоборот, $x = -2$ и $y = \frac{2}{3}$.

III. Задания на уроках

№ 352 (а); 355; 358 (а, б); 360; 362 (в); 363 (а, в, г); 365 (а, в).

IV. Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства функции $y = \sqrt{x}$ и нарисуйте ее график.
2. Перечислите основные свойства функции $y = x^2$ (где $x \geq 0$) и нарисуйте ее график.
3. Приведите основные свойства взаимообратных функций. Что можно сказать о графиках таких функций?

V. Творческие задания

1. Для данной функции найдите обратную. Постройте графики этих функций:

а) $y = 2x - 1$; б) $y = 2 - 3x$; в) $y = \frac{1}{2}x + 1$; г) $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

Ответы: а) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; б) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$; в) $y = 2x - 2$; г) $y = -3x + 6$.

2. При каких значениях a и b функция $y = ax + b$ совпадает с обратной функцией?

Ответ: $a = 1$, $b = 0$ и $a = -1$, b – любое число.

Решение. Для функции $y = ax + b$ выразим переменную x через y. Получаем: $y - b = ax$ и $x = \frac{y - b}{a}$ (если $a \neq 0$) или $x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$. Обозначим независимую переменную буквой x, зависимую – буквой y. Имеем функцию $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$. Эта функция обратная для данной функции $y = ax + b$. Если эти функции совпадают, то при всех x выполняется равенство $ax + b = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

Это возможно при выполнении двух условий:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{a}, \\ b = -\frac{b}{a}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a^2 = 1, \\ ab = -b, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a^2 = 1, \\ b(a+1) = 0. \end{cases}$$

Решения первого уравнения $a = \pm 1$. Если $a = 1$, то при подстановке этого значения во второе уравнение получаем $b \cdot 2 = 0$, откуда $b = 0$. В этом случае данная и обратная функции имеют вид $y = x$. График такой функции совпадает с осью симметрии $y = x$. если $a = -1$, то при подстановке этого значения во второе уравнение получаем $b \cdot 0 = 0$, откуда b – любое число. В этом случае данная и обратная функции имеют вид $y = -x + b$. График такой функции перпендикулярен оси симметрии $y = x$.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 352 (б); 356; 358 (в, г); 361; 362 (б); 363 (б, д, е); 365 (б, г).

§ 6. СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Уроки 31, 32. Квадратный корень из произведения и дроби

Цель: рассмотреть свойства квадратного корня из произведения и дроби.

Планируемые результаты: научиться извлекать квадратный корень из произведения чисел и дроби.

Тип уроков: урок проблемного изложения, продуктивный урок.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Перечислите основные свойства функции $y = \sqrt{x}$ и нарисуйте ее график.

2. Сравните числа: а) $\sqrt{0{,}83}$ и $\sqrt{1{,}37}$; б) 2,5 и $\sqrt{6{,}08}$.

3. Расположите числа в порядке возрастания: 7; $\sqrt{48}$; 6,5; $\sqrt{51}$; $\sqrt{37}$.

4. В какой точке график функции $y = \sqrt{x}$ пересекает прямая $y = -2x - 1$ (если они пересекаются)?

Вариант 2

1. Перечислите основные свойства функции $y = x^2$ и нарисуйте ее график.

2. Сравните числа: а) $\sqrt{0{,}91}$ и $\sqrt{1{,}12}$; б) 1,7 и $\sqrt{3{,}02}$.

3. Расположите числа в порядке убывания: 8; $\sqrt{50}$; 7,5; $\sqrt{65}$; $\sqrt{48}$.

4. В какой точке график функции $y = \sqrt{x}$ пересекает прямая $y = -3x - 2$ (если они пересекаются)?

III. Работа по теме уроков

Теорема. Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей, т. е. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ (где $a \geq 0$ и $b \geq 0$). Докажем это утверждение. Для этого покажем, что выполняются два условия:

1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ и 2) $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = ab$.

Так как $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то каждое из выражений $\sqrt{ab}$ и $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ имеет смысл. По определению арифметического квадратного корня выражения $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ принимают только неотрицательные значения. Поэтому произведение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ неотрицательно.

Используя свойство степени произведения, имеем

$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b = ab.$

Таким образом, мы показали, что выполняются условия 1 и 2. Значит, при любых неотрицательных значениях a и b по определению арифметического квадратного корня выполняется равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Пример 1

Найдем значение выражения:

а) $\sqrt{121 \cdot 0{,}16}$; б) $\sqrt{72 \cdot 128}$; в) $\sqrt{26{,}5^2 - 22{,}5^2}$.

а) Используем теорему о корне из произведения:

$\sqrt{121 \cdot 0{,}16} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{0{,}16} = \sqrt{11^2} \cdot \sqrt{0{,}4^2} = 11 \cdot 0{,}4 = 4{,}4.$

б) Представим подкоренное выражение в виде произведения множителей, каждый из которых является квадратом целого числа. Применим также теорему о корне из произведения. Имеем

$$\sqrt{72\cdot 128}=\sqrt{72\cdot(2\cdot 64)}=\sqrt{(72\cdot 2)\cdot 64}=\sqrt{144\cdot 64}=\sqrt{144}\cdot\sqrt{64}=$$

$$=\sqrt{12^2}\cdot\sqrt{8^2}=12\cdot 8=96.$$

в) В подкоренном выражении разложим разность квадратов чисел на множители и используем теорему о корне из произведения. Получаем: $\sqrt{26{,}5^2-22{,}5^2}=\sqrt{(26{,}5-22{,}5)(26{,}5+22{,}5)}=$ $=\sqrt{4\cdot 49}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{49}=2\cdot 7=14.$

Доказанная теорема справедлива и в случае, когда число множителей в подкоренном выражении больше двух. Докажем это утверждение, например, для трех множителей: $a\ge 0$, $b\ge 0$ и $c\ge 0$. Получаем: $\sqrt{abc}=\sqrt{(ab)\cdot c}=\sqrt{ab}\cdot\sqrt{c}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}$.

Пример 2

Еще раз вернемся к примеру 1, *б* и получим

$$\sqrt{72\cdot 128}=\sqrt{(36\cdot 2)\cdot(2\cdot 64)}=\sqrt{36\cdot 2\cdot 2\cdot 64}=\sqrt{36\cdot 4\cdot 64}=$$

$$=\sqrt{36}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{64}=6\cdot 2\cdot 8=96.$$

Рассмотрим теперь арифметический квадратный корень из дроби.

Теорема. Корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен отношению корня из числителя к корню из знаменателя, т. е. $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (где $a\ge 0$ и $b\ge 0$).

Докажем это утверждение. Для этого покажем, что выполняются два условия: 1) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ge 0$ и 2) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\dfrac{a}{b}$.

Так как $a\ge 0$ и $b>0$, то каждое из выражений $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ и $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ имеют смысл. По определению арифметического квадратного корня выражение $\sqrt{a}$ принимает только неотрицательные значения, а выражение $\sqrt{b}$ – только положительные значения. Поэтому дробь $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ неотрицательна.

Используя свойства степени дроби, имеем $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2}=\dfrac{a}{b}$.

Таким образом, мы показали, что выполняются условия 1 и 2.

Значит, при любых неотрицательных значениях a и положительных значениях b по определению арифметического квадратного корня выполняется равенство $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Пример 3

Найдем значение выражения $\sqrt{\frac{81}{256}}$.

По теореме о корне из дроби имеем $\sqrt{\frac{81}{256}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{256}} = \frac{9}{16}$.

Разумеется, можно сочетать теоремы о корне из произведения и корне из дроби.

Пример 4

Найдем значение выражения $\sqrt{\frac{81 \cdot 64}{25 \cdot 49}}$.

Используя указанные теоремы, получим

$$\sqrt{\frac{81 \cdot 64}{25 \cdot 49}} = \frac{\sqrt{81 \cdot 64}}{\sqrt{25 \cdot 49}} = \frac{\sqrt{81} \cdot \sqrt{64}}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{49}} = \frac{9 \cdot 8}{5 \cdot 7} = \frac{72}{35} = 2\frac{2}{35}.$$

Рассмотренные теоремы справедливы для любых выражений (числовых и алгебраических).

Пример 5

Упростим выражение $\sqrt{\frac{a^4}{b^8 \cdot c^{12}}}$.

Используя теоремы о корне из произведения и корне из дроби, получим

$$\sqrt{\frac{a^4}{b^8 \cdot c^{12}}} = \frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{b^8 \cdot c^{12}}} = \frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{b^8} \cdot \sqrt{c^{12}}} = \frac{\sqrt{\left(a^2\right)^2}}{\sqrt{\left(b^4\right)^2} \cdot \sqrt{\left(c^6\right)^2}} = \frac{a^2}{b^4 c^6}.$$

Тождества $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ также удобно использовать, поменяв их части местами: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ и $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Пример 6

Найдем произведение $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$.

Получаем $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24} = \sqrt{6 \cdot 24} = \sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$.

Пример 7

Найдем значение выражения $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$.

Получаем $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{54}{6}} = \sqrt{9} = 3$.

Пример 8

Найдем значение выражения $\dfrac{\sqrt{18}\cdot\sqrt{108}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}}$.

Используя рассмотренные тождества, получим

$$\frac{\sqrt{18}\cdot\sqrt{108}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{18\cdot108}}{\sqrt{6\cdot3\cdot12}}=\sqrt{\frac{18\cdot108}{6\cdot3\cdot12}}=\sqrt{\frac{108}{12}}=\sqrt{9}=3.$$

Пример 9

Упростим выражение $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^7}\cdot\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^5}}$.

По смыслу задачи переменная $a>0$. Получаем:

$$\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^7}\cdot\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^5}}=\frac{\sqrt{a\cdot a^7\cdot a^3}}{\sqrt{a^5}}=\frac{\sqrt{a^{11}}}{\sqrt{a^5}}=\sqrt{a^6}=\sqrt{\left(a^3\right)^2}=a^3.$$

IV. Задания на уроках

№ 369 (а, г); 370 (в, д); 372 (а, в); 373 (б, г); 376 (в, г); 382 (а, б); 387 (а, г, е).

V. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и запишите теорему о квадратном корне из произведения чисел.
2. Сформулируйте и запишите теорему о квадратном корне из дроби.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 369 (б, д); 370 (г, е); 372 (б, г); 373 (а, в); 376 (д, е); 382 (в, г); 387 (б, в, д).

Урок 33. Квадратный корень из степени

Цель: рассмотреть извлечение квадратного корня из степени числа.

Планируемые результаты: научиться извлекать квадратный корень из степени числа.

Тип урока: урок общеметодологической направленности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Сформулируйте и запишите теорему о квадратном корне из произведения чисел.

2. Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt{\frac{9}{16}}+\sqrt{\frac{25}{36}}$; б) $\sqrt{3\frac{13}{36}}$; в) $\sqrt{\frac{1}{17}}\cdot\sqrt{\frac{6}{25}}\cdot\sqrt{\frac{17}{6}}$; г) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{288}}$; д) $\sqrt{113^2-112^2}$.

Вариант 2

1. Сформулируйте и запишите теорему о квадратном корне из частного.

2. Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt{\frac{16}{9}}+\sqrt{\frac{49}{36}}$; б) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$; в) $\sqrt{\frac{2}{13}}\cdot\sqrt{\frac{8}{25}}\cdot\sqrt{13}$; г) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{294}}$; д) $\sqrt{145^2-144^2}$.

III. Работа по теме урока

Сначала рассмотрим числовые примеры. Найдем значение выражения $\sqrt{x^2}$ при $x = 8$ и при $x = -7$. Получаем: $\sqrt{8^2}=\sqrt{64}=8$ и $\sqrt{(-7)^2}=\sqrt{49}=7$. В каждом из этих примеров корень из квадрата числа равнялся модулю этого числа: $\sqrt{8^2}=|8|=8$ и $\sqrt{(-7)^2}=|-7|=7$. Обобщим результаты этих примеров и докажем теорему.

Теорема. При любом значении x верно равенство $\sqrt{x^2}=|x|$.

Рассмотрим два случая.

а) Если $x \ge 0$, то по определению арифметического корня $\sqrt{x^2}=x$. Так как $x \ge 0$, то $x=|x|$ и равенство может быть записано в виде $\sqrt{x^2}=|x|$.

б) Если $x < 0$, то $-x > 0$ и получаем $\sqrt{x^2}=\sqrt{(-x)^2}=-x$. Так как $x < 0$, то $-x=|x|$ и равенство $\sqrt{x^2}=-x$ можно записать в виде $\sqrt{x^2}=|x|$.

Значит, при любом значении x выполнено равенство $\sqrt{x^2}=|x|$.

Такое тождество очень часто применяется при извлечении квадратного корня из степени с четным показателем. При этом, чтобы извлечь корень из степени с четным показателем, надо представить подкоренное выражение в виде квадрата некоторого выражения и использовать рассмотренное тождество.

Пример 1

Извлечем корень $\sqrt{a^8}$.

Представим степень a^8 в виде квадрата степени a^4, т. е. $a^8 = (a^4)^2$, и используем тождество: $\sqrt{a^8} = \sqrt{\left(a^4\right)^2} = \left|a^4\right| = a^4$. Учтено, что при всех значениях a величина $a^4 \geq 0$ и $|a^4| = a^4$.

Пример 2

Извлечем корень $\sqrt{c^6}$ при $c < 0$.

Представим c^6 в виде $c^6 = \left(c^3\right)^2$ и используем тождество. Получаем $\sqrt{c^6} = \sqrt{\left(c^3\right)^2} = \left|c^3\right| = -c^3$. Учтено, что $c < 0$, тогда $c^3 < 0$ и $|c^3| = -c^3$ (по определению модуля).

Пример 3

Найдем значение выражения $\sqrt{63\,504}$.

Разложим число 63 504 на произведение простых множителей и получим: $63\ 504 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 7^2$. Теперь найдем

$$\sqrt{63\,504} = \sqrt{2^4 \cdot 3^4 \cdot 7^2} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{7^2} = \sqrt{\left(2^2\right)^2} \cdot \sqrt{\left(3^2\right)^2} \cdot 7 =$$

$$= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 4 \cdot 9 \cdot 7 = 252.$$

Полученное тождество позволяет решать и более сложные задачи.

Пример 4

Найдем значение выражения $\sqrt{7-\sqrt{13}} \cdot \sqrt{7+\sqrt{13}}$.

Учтем теорему о корне из произведения и формулу разности квадратов. Получаем:

$$\sqrt{7-\sqrt{13}} \cdot \sqrt{7+\sqrt{13}} = \sqrt{\left(7-\sqrt{13}\right)\cdot\left(7+\sqrt{13}\right)} = \sqrt{7^2-\left(\sqrt{13}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{49-13} = \sqrt{36} = 6.$$

Пример 5

Докажем, что значение выражения $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$ является целым числом.

В каждом подкоренном выражении выделим квадраты разности чисел: $3-2\sqrt{2} = 2-2\sqrt{2}+1 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot 1 + 1^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$ и $11-6\sqrt{2} = 9-6\sqrt{2}+2 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(3-\sqrt{2}\right)^2$. Теперь преобразуем данное выражение:

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} + \sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2} = \left|\sqrt{2}-1\right| +$$

$$+\left|3-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1+3-\sqrt{2} = 2.$$

Было учтено, что $1 < \sqrt{2} < 2$ (можно считать, что $\sqrt{2} \approx 1{,}4$). Поэтому $\sqrt{2} - 1 > 0$ и $\left|\sqrt{2} - 1\right| = \sqrt{2} - 1$, $3 - \sqrt{2} > 0$ и $\left|3 - \sqrt{2}\right| = 3 - \sqrt{2}$. Итак, значение данного выражения является целым (и даже натуральным) числом 2.

Пример 6

Решим уравнение $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 5$.

Учтем, что подкоренное выражение является полным квадратом разности. Поэтому получаем $\sqrt{(x-3)^2} = 5$ и $|x - 3| = 5$. Если модуль некоторой величины равен 5, то сама величина будет равна ± 5. Имеем два линейных уравнения: $x - 3 = 5$ (корень $x = 8$) и $x - 3 = -5$ (корень $x = -2$). Итак, данное уравнение имеет два корня: $x = 8$ и $x = -2$.

Пример 7

Докажем, что при $x \in [-1; 4]$ значения выражения $\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 8x + 16}$ не зависят от величины x.

Подкоренные выражения являются квадратами суммы и разности соответственно. Преобразуем данное выражение:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 8x + 16} = \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-4)^2} = |x + 1| + $$

$$+ |x - 4| = x + 1 - (x - 4) = 5.$$

Учтено, что при $x \in [-1; 4]$ величина $x + 1 \geq 0$ и $|x + 1| = x + 1$; $x - 4 \leq 0$ и $|x - 4| = -(x - 4)$.

Действительно, значения данного выражения равны одному и тому же числу 5 (т. е. не зависят от x).

IV. Задания на уроке

№ 393 (а–в); 394 (б); 397 (а); 399 (б); 400 (а, б); 402 (д); 403 (а, б).

V. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и докажите теорему о корне из квадрата числа (выражения).
2. Как извлечь корень из степени с четным показателем?

VI. Творческие задания

1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$; в) $\sqrt{\sqrt{40} - 2} \cdot \sqrt{\sqrt{40} + 2}$;

б) $\sqrt{\sqrt{23} - \sqrt{7}} \cdot \sqrt{\sqrt{23} + \sqrt{7}}$; г) $\sqrt{6 + \sqrt{11}} \cdot \sqrt{6 - \sqrt{11}}$.

Ответы: а) 2; б) 4; в) 6; г) 5.

2. Упростите выражение:

а) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$;

в) $\sqrt{8-6\sqrt{5}}$;

г) $\sqrt{10+4\sqrt{6}}$;

д) $\sqrt{61-28\sqrt{3}}$;

е) $\sqrt{43+30\sqrt{2}}$.

Ответы: а) $2-\sqrt{3}$; б) $1+\sqrt{2}$; в) $3-\sqrt{5}$; г) $2+\sqrt{6}$; д) $7-2\sqrt{3}$; е) $5+3\sqrt{2}$.

3. Вычислите:

а) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$;

б) $\sqrt{28+10\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

в) $\sqrt{10-4\sqrt{6}}+\sqrt{15-6\sqrt{6}}$;

г) $\sqrt{21+8\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

Ответы: а) 5; б) 6; в) 1; г) 6.

4. Решите уравнение:

а) $\sqrt{(1-x)^2}=3$;

б) $\sqrt{(x-3)^2}=2$;

в) $\sqrt{(3x-5)^2}=1$;

г) $\sqrt{(1-4x)^2}=5$;

д) $\sqrt{x^2-4x+4}=2$;

е) $\sqrt{x^2+6x+9}=4$;

ж) $\sqrt{9x^2-6x+1}=2$;

з) $\sqrt{16x^2-24x+9}=1$.

Ответы: а) $x_1=-2$ и $x_2=4$; б) $x_1=1$ и $x_2=5$; в) $x_1=\frac{4}{3}$ и $x_2=2$; г) $x_1=-1$ и $x_2=1{,}5$; д) $x_1=0$ и $x_2=4$; е) $x_1=-7$ и $x_2=1$; ж) $x_1=-\frac{1}{3}$ и $x_2=1$; з) $x_1=0{,}5$ и $x_2=1$.

5. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(1-x)^2}$ при $x\in(-\infty;-3]$;

б) $\sqrt{(x+4)^2}+\sqrt{(2-x)^2}$ при $x\in[-4;2]$;

в) $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2+6x+9}$ при $x\in[2;+\infty)$;

г) $\sqrt{x^2+8x+16}-\sqrt{1-2x+x^2}$ при $x\in[-4;1]$.

Ответы: а) $-2x-2$; б) 6; в) -5; г) $2x+3$.

VII. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 393 (г–е); 394 (в); 397 (б); 399 (а); 400 (в, г); 402 (е); 403 (в, г).

Урок 34. Контрольная работа № 3 по теме «Свойства квадратного арифметического корня»

Цели: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 самые простые, варианты 3, 4 сложнее и варианты 5, 6 самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую свободу выбора учащимся. При таких же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла, вариантов 5, 6 – 1 балл (т. е. оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач).

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимися (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Вычислите: $\frac{1}{3}\sqrt{144} + 5\sqrt{\frac{16}{225}} - \left(0{,}2\sqrt{6}\right)^2$.

2. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} + \sqrt{150} \cdot \sqrt{6} - \sqrt{7^4 \cdot 3^2}$.

3. Решите уравнение $2\sqrt{x-1} = 4$.

4. Решите неравенство $3\sqrt{x+2} > -1$.

5. Упростите выражение $\frac{1}{2}a^4\sqrt{36a^6}$ при $a < 0$.

6. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\frac{3x-4}{\sqrt{x}-3}$.

Вариант 2

1. Вычислите: $\frac{1}{7}\sqrt{196}+3\sqrt{\frac{49}{324}}-\left(0{,}3\sqrt{8}\right)^2$.

2. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}}-\sqrt{75\cdot 12}+\sqrt{5^4\cdot 3^2}$.

3. Решите уравнение $3\sqrt{x+1}=9$.

4. Решите неравенство $2\sqrt{x-2}>-3$.

5. Упростите выражение $\frac{1}{3}a^2\sqrt{81a^6}$ при $a<0$.

6. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\frac{2x-3}{\sqrt{x}-4}$.

Вариант 3

1. Вычислите: $\frac{2}{3}\sqrt{196}+3\sqrt{\frac{81}{289}}-\left(0{,}3\sqrt{7}\right)^2$.

2. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{392}}{\sqrt{8}}+\sqrt{192}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{7^4\cdot 5^2}$.

3. Решите уравнение $\sqrt{x^2-4x+4}=3$.

4. Решите неравенство $2\sqrt{x-1}+\sqrt{x}>-0{,}2$.

5. Упростите выражение $\frac{1}{2}a^4\sqrt{36a^2}+2a^3\sqrt{9a^4}$ при $a<0$.

6. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\frac{2x-4}{\sqrt{x-1}-2}$.

Вариант 4

1. Вычислите: $\frac{3}{4}\sqrt{169}+2\sqrt{\frac{121}{196}}-\left(0{,}2\sqrt{6}\right)^2$.

2. Найдите значение выражения: $\frac{\sqrt{567}}{\sqrt{7}}+\sqrt{338}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{7^4\cdot 3^2}$.

3. Решите уравнение $\sqrt{x^2-6x+9}=4$.

4. Решите неравенство $3\sqrt{x-2}+5\sqrt{x}>-0{,}1$.

5. Упростите выражение $\frac{1}{3}a^2\sqrt{81a^6}+2a\sqrt{16a^8}$ при $a<0$.

6. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\frac{3x-6}{\sqrt{x-2}-3}$.

Вариант 5

1. Вычислите: $\sqrt{7-\sqrt{13}} \cdot \sqrt{\sqrt{13}+7}$.

2. Найдите значение выражения $\sqrt{9+4\sqrt{5}} + \left|\sqrt{5}-4\right|$.

3. Решите уравнение $2x + \sqrt{x^2-4x+4} = 7$.

4. Решите неравенство $2\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x} + 4\sqrt{x+1} > -0{,}1$.

5. Упростите выражение $2a^4\sqrt{9a^2} + 3a^3\sqrt{16a^4} + a^4|a+1|$ при $a < 0$.

6. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\dfrac{3x-6}{\sqrt{x-1}-2} + \dfrac{5x-15}{|x|-2}$.

Вариант 6

1. Вычислите: $\sqrt{9-\sqrt{32}} \cdot \sqrt{\sqrt{32}+9}$.

2. Найдите значение выражения $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \left|\sqrt{3}-3\right|$.

3. Решите уравнение $3x + \sqrt{x^2-6x+9} = 5$.

4. Решите неравенство $3\sqrt{x-2} + 2\sqrt{x} + \sqrt{x+2} > -0{,}2$.

5. Упростите выражение $3a^2\sqrt{81a^6} + 4a\sqrt{16a^8} + a^4|a+2|$ при $a < 0$.

6. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\dfrac{2x-4}{\sqrt{x-2}-3} + \dfrac{4x-8}{|x|-4}$.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ (число решивших задачу правильно или почти правильно);
± (число решивших задачу со значительными погрешностями);
– (число не решивших задачу);
∅ (число не решавших задачу).

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими их).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям и разобрать наиболее трудные варианты).

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. $5\frac{7}{75}$.
2. -110.
3. $x = 5$.
4. $x \geq -2$.
5. $-3a^7$.
6. $x \geq 0$, $x \neq 9$.

Вариант 2

1. $2\frac{67}{150}$.
2. 53.
3. $x = 8$.
4. $x \geq 2$.
5. $-3a^5$.
6. $x \geq 0$, $x \neq 16$.

Вариант 3

1. $10\frac{1487}{5100}$.
2. -214.
3. $x_1 = -1$, $x_2 = 5$.
4. $x \geq 1$.
5. $-3a^5$.
6. $x \geq 1$, $x \neq 5$.

Вариант 4

1. $12\frac{457}{700}$.
2. -112.
3. $x_1 = -1$, $x_2 = 7$.
4. $x \geq 2$.
5. $5a^5$.
6. $x \geq 2$, $x \neq 11$.

Вариант 5

1. Учтем свойства квадратного корня и формулу разности квадратов. Тогда получаем

$$\sqrt{7-\sqrt{13}} \cdot \sqrt{\sqrt{13}+7} = \sqrt{\left(7-\sqrt{13}\right)\cdot\left(7+\sqrt{13}\right)} = \sqrt{7^2-\left(\sqrt{13}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{49-13} = \sqrt{36} = 6.$$

Ответ: 6.

2. В подкоренном выражении выделим полный квадрат суммы:

$$9+4\sqrt{5} = 5+2\cdot 2\sqrt{5}+4 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{5}\cdot 2 + 2^2 = \left(\sqrt{5}+2\right)^2.$$

Имеем

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}} + \left|\sqrt{5}-4\right| = \sqrt{\left(\sqrt{5}+2\right)^2} + \left|\sqrt{5}-4\right| = \left|\sqrt{5}+2\right| + \left|\sqrt{5}-4\right| =$$

$$= \sqrt{5}+2-\sqrt{5}+4 = 6.$$

Учтено, что $\sqrt{5}+2>0$ и $\left|\sqrt{5}+2\right| = \sqrt{5}+2$, $\sqrt{5}-4<0$ и $\left|\sqrt{5}-4\right| = -\left(\sqrt{5}-4\right) = -\sqrt{5}+4$.

Ответ: 6.

3. Учтем, что подкоренное выражение является полным квадратом разности. Тогда получаем: $2x + |x - 2| = 7$. Раскроем знак модуля, рассмотрев два случая:

а) если $x - 2 \geq 0$ (т. е. $x \geq 2$), то $|x - 2| = x - 2$ и уравнение имеет вид $2x + x - 2 = 7$ или $3x = 9$, откуда $x = 3$. Этот корень действительно удовлетворяет условию $x \geq 2$;

б) если $x - 2 < 0$ (т. е. $x < 2$), то $|x - 2| = -(x + 2) = -x + 2$ и уравнение имеет вид $2x - x + 2 = 7$, откуда $x = 5$. Но этот корень не удовлетворяет условию $x < 2$ и не является решением уравнения.

Ответ: $x = 3$.

4. Очевидно, что левая часть неравенства представляет собой сумму трех корней с положительными коэффициентами и является величиной неотрицательной. Поэтому неравенство выполняется, если подкоренные выражения неотрицательны: $x - 1 \geq 0$, $x \geq 0$, $x + 1 \geq 0$. Решая эти неравенства, получим соответственно: $x \geq 1$, $x \geq 0$, $x \geq -1$. Следовательно, решение всех трех неравенств $x \geq 1$.

Ответ: $x \geq 1$.

5. Учтем свойства квадратного корня и натуральных степеней. Получаем:

$$2a^4\sqrt{9a^2} + 3a^3\sqrt{16a^4} + a^4 \cdot |a+1| = 2a^4 \cdot |3a| + 3a^3 \cdot \left|4a^2\right| +$$

$$+ a^4 \cdot |a+1| = 2a^4 \cdot (-3a) + 3a^3 \cdot 4a^2 + a^4|a+1| =$$

$$= 2a^4 \cdot (-3a) + 3a^3 \cdot 4a^2 + a^4|a+1| = 6a^5 + a^4|a+1|.$$

Было учтено, что $a < 0$ и $|3a| = -3a$, $|4a^2| = 4a^2$. Теперь раскроем знак модуля.

а) Если $a + 1 < 0$ (т. е. $a < -1$), то $|a + 1| = -(a + 1)$ и $6a^5 + a^4|a + 1| = 6a^5 - a^4(a + 1) = 6a^5 - a^5 - a^4 = 5a^5 - a^4$.

б) Если $a + 1 \geq 0$ (т. е. $-1 \leq a < 0$), то $|a + 1| = a + 1$ и $6a^5 + a^4|a + 1| = 6a^5 + a^4(a + 1) = 6a^5 + a^5 + a^4 = 7a^5 + a^4$.

Ответ: при $a < -1$ $5a^5 - a^4$; при $-1 \leq a < 0$ $7a^5 + a^4$.

6. Выражение будет иметь смысл, если подкоренное выражение неотрицательно и знаменатели дробей не равны нулю, т. е. $x - 1 \geq 0$; $\sqrt{x-1} - 2 \neq 0$; $|x| - 2 \neq 0$. Соответственно, решим эти неравенства: $x \geq 1$; $x \neq 5$; $x \neq \pm 2$. Однако значение $x = -2$ в область $x \geq 1$ не попадает. Поэтому допустимые значения переменной в данном выражении $x \geq 1$, $x \neq 5$, $x \neq 2$.

Ответ: $x \geq 1$, $x \neq 5$, $x \neq 2$.

Вариант 6

1. Учтем свойства квадратного корня и формулу разности квадратов. Тогда получаем:

$$\sqrt{9-\sqrt{32}}\cdot\sqrt{\sqrt{32}+9}=\sqrt{\left(9-\sqrt{32}\right)\cdot\left(\sqrt{32}+9\right)}=$$

$$=\sqrt{\left(9-\sqrt{32}\right)\left(9+\sqrt{32}\right)}=\sqrt{9^2-\left(\sqrt{32}\right)^2}=\sqrt{81-32}=\sqrt{49}=7.$$

Ответ: 7.

2. В подкоренном выражении выделим полный квадрат суммы:

$$7+4\sqrt{3}=4+2\cdot2\sqrt{3}+3=2^2+2\cdot2\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^2.$$

Имеем

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\left|\sqrt{3}-3\right|=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}+\left|\sqrt{3}-3\right|=\left|2+\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-3\right|=$$

$$=2+\sqrt{3}-\sqrt{3}+3=5.$$

Учтено, что $2+\sqrt{3}>0$ и $\left|2+\sqrt{3}\right|=2+\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-3<0$ и $\left|\sqrt{3}-3\right|=-\left(\sqrt{3}-3\right)=-\sqrt{3}+3$.

Ответ: 5.

3. Учтем, что подкоренное выражение является полным квадратом разности. Тогда получаем $3x+|x-3|=5$. Раскроем знак модуля, рассмотрев два случая:

а) если $x-3\geq0$ (т. е. $x\geq3$), то $|x-3|=x-3$ и уравнение имеет вид $3x+x-3=5$ или $4x=8$, откуда $x=2$. Но этот корень не удовлетворяет условию $x\geq3$ и не является решением уравнения;

б) если $x-3<0$ (т. е. $x<3$), то $|x-3|=-(x-3)=-x+3$ и уравнение имеет вид $3x-x+3=5$ или $2x=2$, откуда $x=1$. Этот корень действительно удовлетворяет условию $x<3$.

Ответ: $x=1$.

4. Очевидно, что левая часть неравенства представляет собой сумму трех корней с положительными коэффициентами и является величиной неотрицательной. Поэтому неравенство выполняется, если подкоренные выражения неотрицательны: $x-2\geq0$, $x\geq0$, $x+2\geq0$. Решая эти неравенства, получим соответственно $x\geq2$, $x\geq0$, $x\geq-2$. Следовательно, решение всех трех неравенств $x\geq2$.

Ответ: $x\geq2$.

5. Учтем свойства квадратного корня и натуральных степеней. Получаем

$$3a^2\sqrt{81a^6}+4a\sqrt{16a^8}+a^4\cdot|a+2|=3a^2\cdot\left|9a^3\right|+4a\cdot\left|4a^4\right|+a^4\cdot|a+2|=$$

$$=3a^2\cdot\left(-9a^3\right)+4a\cdot4a^4+a^4\cdot|a+2|=-11a^5+a^4\cdot|a+2|.$$

Было учтено, что $a<0$ и $|9a^3|=-9a^3$, $|4a^4|=4a^4$. Теперь раскроем знак модуля.

а) Если $a + 2 < 0$ (т. е. $a < -2$), то $|a + 2| = -(a + 2)$ и $-11a^5 + a^4|a + 2| = -11a^5 - a^4(a + 2) = -12a^5 - 2a^4$.

б) Если $a + 2 \geq 0$ (т. е. $-2 \leq a < 0$), то $|a + 2| = a + 2$ и $-11a^5 + a^4|a + 2| = -11a^5 + a^4(a + 2) = -10a^5 + 2a^4$.

Ответ: при $a < -2$ $-12a^5 - 2a^4$; при $-2 \leq a < 0$ $-10a^5 + 2a^4$.

6. Выражение будет иметь смысл, если подкоренное выражение неотрицательно и знаменатели дробей не равны нулю, т. е. $x - 2 \geq 0$; $\sqrt{x-2} - 3 \neq 0$; $|x| - 4 \neq 0$. Соответственно, решим эти неравенства: $x \geq 2$; $x \neq 11$; $x \neq \pm 4$. Однако значение $x = -4$ в область $x \geq 2$ не попадает. Поэтому допустимые значения переменной в данном выражении: $x \geq 2$, $x \neq 11$, $x \neq 4$.

Ответ: $x \geq 2$, $x \neq 11$, $x \neq 4$.

VI. Подведение итогов урока

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Уроки 35–37. Вынесение множителя из-под знака корня. Внесение множителя под знак корня

Цели: рассмотреть и отработать вынесение множителя из-под знака корня и внесение множителя под знак корня.

Планируемые результаты: научится использовать свойства квадратного корня для вынесения множителя из-под знака корня и внесения множителя под знак корня.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Работа по теме уроков

Для сравнения числовых выражений, преобразования иррациональных выражений и т. д. необходимы навыки *вынесения множителя из-под знака корня* и *внесения множителя под знак корня*, основанные на использовании свойств квадратного корня. Рассмотрим эти приемы на примерах.

Пример 1

Сравним значения выражений $\sqrt{75}$ и $6\sqrt{3}$. Это можно сделать двумя способами.

Способ 1. Преобразуем первое иррациональное число $\sqrt{75}$. Представим число 75 в виде произведения двух множителей, один из которых является квадратом натурального числа: $75 = 25 \cdot 3$. Используем теорему о корне из произведения и получим $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. Теперь легко сравнить данные числа. Так как $5\sqrt{3} < 6\sqrt{3}$, то $\sqrt{75} < 6\sqrt{3}$.

При решении число $\sqrt{75}$ было заменено произведением двух множителей: 5 и $\sqrt{3}$, один из которых – целое число 5, а другое – иррациональное число $\sqrt{3}$. Это преобразование и называют *вынесением множителя из-под знака корня.*

Способ 2. Теперь преобразуем второе иррациональное число $6\sqrt{3}$, представив его в виде арифметического квадратного корня. Для этого число 6 заменим выражением $\sqrt{36}$ и используем теорему о корне из произведения: $6\sqrt{3} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36 \cdot 3} = \sqrt{108}$. Сравним данные числа. Так как $75 < 108$, то $\sqrt{75} < \sqrt{108}$ или $\sqrt{75} < 6\sqrt{3}$.

При решении выражение $6\sqrt{3}$ было представлено в виде арифметического квадратного корня $\sqrt{108}$. Такое преобразование называют *внесением множителя под знак корня.*

Эти способы используются и при решении более сложных задач.

Пример 2

Упростим выражение $20\sqrt{2} + 15\sqrt{50} - 30\sqrt{8} - 9\sqrt{32}$.

В данном выражении вынесем множители из-под знаков корня. Для этого подкоренные выражения представим в виде произведений квадратов натуральных чисел и числа 2, т. е. $50 = 25 \cdot 2 = 5^2 \cdot 2$, $8 = 4 \cdot 2 = 2^2 \cdot 2$ и $32 = 16 \cdot 2 = 4^2 \cdot 2$. Тогда данное выражение имеет вид

$$20\sqrt{2} + 15\sqrt{50} - 30\sqrt{8} - 9\sqrt{32} = 20\sqrt{2} + 15\sqrt{5^2 \cdot 2} - 30\sqrt{2^2 \cdot 2} -$$

$$- 9\sqrt{4^2 \cdot 2} = 20\sqrt{2} + 15 \cdot 5\sqrt{2} - 30 \cdot 2\sqrt{2} - 9 \cdot 4\sqrt{2} = 20\sqrt{2} + 75\sqrt{2} -$$

$$- 60\sqrt{2} - 36\sqrt{2} = -\sqrt{2}.$$

Было учтено, что все слагаемые являются подобными членами, так как содержат выражения $\sqrt{2}$ с разными коэффициентами. Итак, данное выражение равно иррациональному числу $-\sqrt{2} \approx -1{,}41$.

Пример 3

Докажем, что выражение $A = \left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}$ равно натуральному числу 2.

В выражении A изменим порядок умножения и внесем величину $4+\sqrt{15}$ под знак корня. Получаем

$$A = \left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\left(4+\sqrt{15}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}} =$$

$$= \left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)^2\left(4-\sqrt{15}\right)} =$$

$$= \left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)\left(4+\sqrt{15}\right)\left(4-\sqrt{15}\right)} =$$

$$= \left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)\left(4^2-\left(\sqrt{15}\right)^2\right)} =$$

$$= \left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)(16-15)} = \left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4+\sqrt{15}}.$$

Была использована формула разности квадратов. Теперь внесем под знак корня величину $\sqrt{10}-\sqrt{6}$. Имеем

$$A = \left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4+\sqrt{15}} = \sqrt{\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)^2\left(4+\sqrt{15}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(10-2\sqrt{10\cdot 6}+6\right)\left(4+\sqrt{15}\right)} = \sqrt{\left(16-2\sqrt{60}\right)\left(4+\sqrt{15}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(16-2\sqrt{4\cdot 15}\right)\left(4+\sqrt{15}\right)} = \sqrt{\left(16-4\sqrt{15}\right)\left(4+\sqrt{15}\right)} =$$

$$= \sqrt{4\left(4-\sqrt{15}\right)\left(4+\sqrt{15}\right)} = \sqrt{4\left(4^2-\left(\sqrt{15}\right)^2\right)} = \sqrt{4(16-15)} = \sqrt{4} = 2.$$

Были использованы формула квадрата разности и вновь формула разности квадратов. Итак, данное выражение действительно равно натуральному числу 2.

Теперь рассмотрим применение этих способов в выражениях с переменными.

Пример 4

Вынесем множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt{a^3}$.

Выражение $\sqrt{a^3}$ имеет смысл только при $a \geq 0$ (если $a < 0$, то и $a^3 < 0$). Представим подкоренное выражение a^3 в виде произведения $a^2 \cdot a$, в котором множитель a^2 является степенью с четным показателем. Тогда, учитывая свойства квадратного корня, получаем $\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 \cdot a} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = |a|\sqrt{a} = a\sqrt{a}$. При этом было учтено, что $a \geq 0$ и $|a| = a$.

Пример 5

Вынесем множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt{-a^7}$.

Выражение $\sqrt{-a^7}$ имеет смысл только при $-a^7 \geq 0$ (или $a^7 \leq 0$), т. е. $a \leq 0$. Представим подкоренное выражение $-a^7$ в виде произведения $a^6 \cdot (-a)$, в котором первый множитель a^6 является степенью с четным показателем, а второй множитель $(-a)$ принимает только неотрицательные значения. Тогда получаем $\sqrt{-a^7} = \sqrt{a^6 \cdot (-a)} = \sqrt{a^6} \cdot \sqrt{-a} = \sqrt{(a^3)^2} \cdot \sqrt{-a} = |a^3|\sqrt{-a} = -a^3\sqrt{-a}$.

Было учтено, что $a^3 \leq 0$ и $|a^3| = -a^3$.

Пример 6

Внесем множитель под знак корня в выражении $-5\sqrt{x^3}$.

Отрицательный множитель -5 нельзя представить в виде арифметического квадратного корня, и поэтому такой множитель нельзя внести под знак корня. Поэтому внесем под знак корня положительный множитель 5. Получаем $-5\sqrt{x^3} = -1 \cdot 5 \cdot \sqrt{x^3} = -1 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{x^3} = -\sqrt{25x^3}$. Данное и полученное выражение имеют смысл только при $x \geq 0$.

Пример 7

Внесем множитель под знак корня в выражении $a\sqrt{a^4}$.

Множитель a может быть любым числом (положительным, нулем или отрицательным). Поэтому надо рассмотреть два случая:

1) если $a \geq 0$, то $|a| = a$ и выражение имеет вид $a\sqrt{a^4} = |a|\sqrt{a^4} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a^4} = \sqrt{a^2 \cdot a^4} = \sqrt{a^6}$;

2) если $a < 0$, то $|a| = -a$ или $a = -|a|$ и выражение имеет вид $a\sqrt{a^4} = -|a|\sqrt{a^4} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a^4} = -\sqrt{a^2 \cdot a^4} = -\sqrt{a^6}$. Итак, данное выражение равно $\sqrt{a^6}$ при $a \geq 0$ и равно $-\sqrt{a^6}$ при $a < 0$. Обратите внимание на то, что результат существенно зависит от знака переменной a.

Пример 8

Упростим выражение $A = (a-3)\sqrt{\dfrac{16}{a^2 - 6a + 9}}$.

Учтем, что знаменатель подкоренного выражения является квадратом разности. Получаем

$$A = (a-3)\sqrt{\frac{16}{a^2 - 6a + 9}} = \frac{(a-3)\sqrt{16}}{\sqrt{(a-3)^2}} = \frac{(a-3) \cdot 4}{|a-3|}.$$

Раскроем знак модуля, рассмотрев два случая:

а) если $a > 3$, то $a - 3 > 0$ и $|a - 3| = a - 3$, данное выражение равно $A = \dfrac{(a-3) \cdot 4}{a-3} = 4$;

б) если $a < 3$, то $a - 3 < 0$ и $|a - 3| = -(a - 3)$, данное выражение равно $A = \frac{(a-3)\cdot 4}{-(a-3)} = -4$;

Итак, выражение $A = 4$ при $a > 3$; $A = -4$ при $a < 3$. При $a = 3$ выражение A не имеет смысла. И вновь результат существенно зависит от значения переменной a.

III. Задания на уроках

№ 407 (а, д); 408 (г, д); 410 (а–в); 411; 412 (б–г); 413 (а, в); 414 (а, д); 415 (а, б); 416 (а, в); 417.

IV. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 407 (б, е); 408 (б, в); 410 (г–е); 412 (а, д, е); 413 (б, г); 414 (в, е); 415 (в, г); 416 (б, г).

Уроки 38–41. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

Цель: рассмотреть основные приемы преобразования иррациональных выражений.

Планируемые результаты: отработать навыки преобразования иррациональных выражений.

Тип уроков: продуктивные уроки, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{180}$; б) $\frac{3}{7}\sqrt{147}$; в) $\sqrt{\frac{5a^6}{49}}$ при $a \le 0$.

2. Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt{7}$; б) $\frac{1}{4}\sqrt{48a}$; в) $a^5\sqrt{6}$ при $a \le 0$.

3. Сравните значения выражений $\frac{6}{5}\sqrt{2}$ и $2\sqrt{\frac{19}{25}}$.

Вариант 2

1. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{175}$; б) $\frac{5}{6}\sqrt{180}$; в) $\sqrt{\frac{7a^{10}}{36}}$ при $a \le 0$.

2. Внесите множитель под знак корня:

а) $4\sqrt{6}$; б) $\frac{1}{6}\sqrt{108a}$; в) $a^3\sqrt{5}$ при $a \le 0$.

3. Сравните значения выражений $\frac{3}{4}\sqrt{17}$ и $9\sqrt{\frac{1}{8}}$.

III. Работа по теме уроков

В процессе изучения были рассмотрены тождественные преобразования иррациональных выражений. К ним относятся преобразования корней из произведения, дроби и степени; умножение и деление корней; вынесение множителя из-под знака корня; внесение множителя под знак корня. Рассмотрим другие примеры тождественных преобразований иррациональных выражений.

Пример 1

Упростим выражение $8a\sqrt{3a} + 3\sqrt{75a^3} - 10\sqrt{12a^3} - 2\sqrt{3a^3}$.

Данное выражение имеет смысл при $a \ge 0$. Учитывая свойства корней, вынесем множители из-под знаков корня. Получаем

$$8a\sqrt{3a} + 3\sqrt{75a^3} - 10\sqrt{12a^3} - 2\sqrt{3a^3} = 8a\sqrt{3a} + 3\sqrt{25a^2 \cdot 3a} -$$

$$-10\sqrt{4a^2 \cdot 3a} - 2\sqrt{a^2 \cdot 3a} = 8a\sqrt{3a} + 3 \cdot 5a\sqrt{3a} - 10 \cdot 2a\sqrt{3a} -$$

$$-2a\sqrt{3a} = 8a\sqrt{3a} + 15a\sqrt{3a} - 20a\sqrt{3a} - 2a\sqrt{3a} =$$

$$= a\sqrt{3a}(8 + 15 - 20 - 2) = a\sqrt{3a}.$$

Заметим, что на последнем этапе в выражении были *приведены подобные члены.*

Пример 2

Преобразуем произведение $(12\sqrt{3} - 4\sqrt{2})(3\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

Умножим каждый член в первой скобке на каждый член во второй (аналогично произведению многочленов) и получим

$$(12\sqrt{3} - 4\sqrt{2})(3\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 12\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} + 12\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} -$$

$$-4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 108 - 8 = 100.$$

Заметим, что вычисления можно упростить, если из первой скобки вынести множитель 4 и использовать формулу разности квадратов. Получаем

$$\left(12\sqrt{3}-4\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=4\left(3\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=$$

$$=4\left(\left(3\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)=4(27-2)=100.$$

Пример 3

Сократим дробь $\dfrac{2a^2-5}{a\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.

Учтем, что $2a^2=\left(a\sqrt{2}\right)^2$ и $5=\left(\sqrt{5}\right)^2$. Тогда числитель дроби можно разложить на множители, используя формулу разности квадратов. Получаем

$$\frac{2a^2-5}{a\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}{a\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{\left(a\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(a\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{a\sqrt{2}+\sqrt{5}}=$$

$$=a\sqrt{2}-\sqrt{5}.$$

Пример 4

Сократим дробь $\dfrac{a^2-2}{a^2-2\sqrt{2}a+2}$.

Разложим на множители числитель дроби, используя формулу разности квадратов, и знаменатель дроби, используя формулу квадрата разности. Получаем

$$\frac{a^2-2}{a^2-2\sqrt{2}a+2}=\frac{a^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{a^2-2\cdot a\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\left(a-\sqrt{2}\right)\left(a+\sqrt{2}\right)}{\left(a-\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{a+\sqrt{2}}{a-\sqrt{2}}.$$

Достаточно часто приходится избавляться от иррациональности в знаменателе (или числителе) дроби. Для этого числитель и знаменатель умножают на сопряженную величину, т. е. такую, знаменатель (или числитель) которой не содержит иррациональных выражений.

Пример 5

Избавимся от иррациональности в знаменатели дроби $\dfrac{5c}{\sqrt{2c}}$.

Очевидно, что знаменатель дроби не будет содержать знака квадратного корня, если числитель и знаменатель дроби умножить на величину $\sqrt{2c}$ (которая является величиной, сопряженной знаменателю в этом случае). Получаем

$$\frac{5c}{\sqrt{2c}}=\frac{5c\cdot\sqrt{2c}}{\sqrt{2c}\cdot\sqrt{2c}}=\frac{5c\sqrt{2c}}{2c}=\frac{5\sqrt{2c}}{2}.$$

Мы заменили дробь $\frac{5c}{\sqrt{2c}}$ (содержащую иррациональность $\sqrt{2c}$ в знаменателе) тождественно равной дробью $\frac{5\sqrt{2c}}{2}$ (которая уже не содержит иррациональности в знаменателе). Тем самым мы освободились от иррациональности в знаменателе дроби.

Пример 6

Избавимся от иррациональности в числителе дроби $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$.

Чтобы избавиться от иррациональности в числителе дроби $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$, надо умножить числитель и знаменатель на величину $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (которая является сопряженной числителю величиной). При этом в числителе появляется разность квадратов чисел, которая и приводит к исчезновению квадратных корней в числителе. Получаем

$$\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)} =$$

$$= \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}-3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}-2\cdot 3} =$$

$$= \frac{8-3}{12-3\sqrt{6}+4\sqrt{6}-6} = \frac{5}{6+\sqrt{6}}.$$

Таким образом, дробь $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$ (содержащая иррациональность $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$ в числителе) была заменена тождественно равной дробью $\frac{5}{6+\sqrt{6}}$ (которая не содержит иррациональности в числителе). Тем самым мы избавились от иррациональности в числителе.

Заметим, что подобное умение избавляться от иррациональности полезно и при решении более сложных задач.

Пример 7

Найдем сумму дробей:

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{35}+\sqrt{36}}.$$

В каждой дроби избавимся от иррациональности в знаменателе, умножив ее числитель и знаменатель на величину, сопряженную знаменателю. Получаем

$$S = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} +$$

$$+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)} + \ldots + \frac{\sqrt{36}-\sqrt{35}}{\left(\sqrt{35}+\sqrt{36}\right)\left(\sqrt{36}-\sqrt{35}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + \ldots + \frac{\sqrt{36}-\sqrt{35}}{36-35} = \sqrt{2}-\sqrt{1}+$$

$$+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{36}-\sqrt{35} = -\sqrt{1}+\sqrt{36} = -1+6 = 5.$$

Видно, что, после того как мы избавились от иррациональности, знаменатели всех дробей стали равны 1. В полученной сумме сокращаются все слагаемые, кроме $-\sqrt{1}$ и $\sqrt{36}$. В итоге получаем, что сумма всех данных иррациональных дробей равна натуральному числу 5.

Пример 8

Найдем наибольшее значение дроби $A = \dfrac{1-\sqrt{a-3}}{4-a}$.

Допустимые значения переменной в данной дроби $a \geq 3$, $a \neq 4$. Избавимся от иррациональности в числителе дроби A, умножив ее числитель и знаменатель на сопряженную величину $1+\sqrt{a-3}$. Получаем

$$A = \frac{\left(1-\sqrt{a-3}\right)\left(1+\sqrt{a-3}\right)}{(4-a)\left(1+\sqrt{a-3}\right)} = \frac{1^2-\left(\sqrt{a-3}\right)^2}{(4-a)\left(1+\sqrt{a-3}\right)} =$$

$$= \frac{4-a}{(4-a)\left(1+\sqrt{a-3}\right)} = \frac{1}{1+\sqrt{a-3}}.$$

Так как числитель этой дроби не зависит от переменной, а знаменатель – зависит, то дробь принимает наибольшее значение, если имеет наименьший знаменатель $1+\sqrt{a-3}$, по определению арифметического квадратного корня $\sqrt{a-3} \geq 0$. Тогда наименьшее значение знаменателя $1+\sqrt{a-3}$ равно 1 и достигается при $a = 3$. Следовательно, наибольшее значение данной дроби A равно 1 и достигается при $a = 3$.

При преобразовании иррациональных выражений часто полезно ввести новую переменную (сделать замену переменной).

Пример 9

Упростим выражение $\dfrac{\sqrt{\dfrac{a+2}{a-2}}+\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}}{\sqrt{\dfrac{a+2}{a-2}}-\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}}$.

Видно, что в данное выражение входит или величина $\sqrt{\frac{a+2}{a-2}}$, или обратная ей величина $\sqrt{\frac{a-2}{a+2}}$. Поэтому введем новую переменную $x = \sqrt{\frac{a+2}{a-2}}$ (очевидно, $x^2 = \frac{a+2}{a-2}$), тогда $\sqrt{\frac{a-2}{a+2}} = \frac{1}{x}$. После этого данное выражение имеет вид $\frac{x + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. Теперь подставим значение x^2 и получим $\frac{\frac{a+2}{a-2}+1}{\frac{a+2}{a-2}-1} = \frac{\frac{2a}{a-2}}{\frac{4}{a-2}} = \frac{2a}{4} = \frac{a}{2}$.

Итак, данное выражение равно $\frac{a}{2}$.

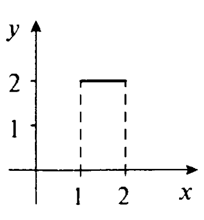
Пример 10

Упростим выражение $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ и построим график функции $y(x)$ для $1 \le x \le 2$.

Введем новую переменную $a = \sqrt{x-1}$ (очевидно, допустимые значения $x \ge 1$). Возведем в квадрат обе части этого равенства: $a^2 = x - 1$ – и выразим величину x: $x = a^2 + 1$. Подставим эту величину x в данное выражение: $y = \sqrt{a^2+1+2a} + \sqrt{a^2+1-2a} = \sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-1)^2} = |a+1| + |a-1|$. Чтобы раскрыть знаки модуля в этом выражении, оценим величину a. При $1 \le x \le 2$ величина $x - 1$ принимает значения $0 \le x - 1 \le 1$ и величина $a = \sqrt{x-1}$ имеет значения $0 \le a \le 1$.

При таких значениях a раскроем модули в выражении $y = |a+1| + |a-1| = (a+1) - (a-1) = 2$. Видно, что при значениях $1 \le x \le 2$ величина y не зависит от x и равна 2. Теперь построим график.

Построим горизонтальную прямую $y = 2$ для $1 \le x \le 2$. Графиком функции является горизонтальный отрезок.



В более сложных случаях замена переменной не помогает и преобразования иррациональных выражений выполняют напрямую.

Пример 11

Упростим выражение

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right) : \left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right).$$

Удобно выполнить преобразования по действиям (учитывая их порядок).

1. При сложении дробей предварительно избавимся от иррациональности в знаменателях дробей. Получим

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}} = \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)} +$$

$$+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{a-1}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)} = \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a+1}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2} +$$

$$+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{a-1}\right)^2} = \sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}.$$

2. Приведем выражения к общему знаменателю:

$$1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}} = 1+\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} = \frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}.$$

3. Выполним деление выражений:

$$\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}\right) : \frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} = \frac{\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}\right)\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}} =$$

$$= \sqrt{a-1}.$$

Итак, данное выражение равно $\sqrt{a-1}$ и имеет смысл при $a > 1$.

IV. Задания на уроках

№ 421 (а, б); 422 (г—е); 423 (а, в, д); 424 (а, г); 425 (б); 427 (в, д); 429 (а, в); 431 (б, д); 433 (а, в, д); 434 (б); 437 (а); 439.

V. Творческие задания

1. Сравните значения числовых выражений:

а) $A = \frac{1}{3\sqrt{3}-5} + \frac{1}{3\sqrt{3}+5}$ и $B = \sqrt{30}$;

б) $A = \frac{1}{4+2\sqrt{5}} - \frac{1}{4-2\sqrt{5}}$ и $B = \sqrt{6}$;

в) $A = \sqrt{19} - \sqrt{18}$ и $B = \sqrt{18} - \sqrt{17}$;

г) $A = \sqrt{23} - \sqrt{21}$ и $B = \sqrt{21} - \sqrt{19}$;

д) $A = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ и $B = 3{,}1$;

е) $A = \dfrac{5}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}$ и $B = 1{,}3$.

Ответы: а–г) $A < B$; д) $A > B$; е) $A < B$ (указания: а, б – для числа A выполните действия; в, г – умножьте и разделите числа A и B на сопряженные; д, е – избавьтесь от иррациональности в знаменателе числа A).

2. Найдите наибольшее значение выражения. При каком значении a оно достигается?

а) $\dfrac{2 - \sqrt{a-4}}{8-a}$; б) $\dfrac{3 - \sqrt{a+2}}{7-a}$.

Ответы: а) $\dfrac{1}{2}$ при $a = 4$; б) $\dfrac{1}{3}$ при $a = -2$ (указание: избавьтесь от иррациональности в числителе).

3. Найдите наименьшее значение выражения. При каком значении a оно достигается?

а) $\dfrac{13 - a^2}{3 - \sqrt{a^2 - 4}}$; б) $\dfrac{a^2 + 24}{5 - \sqrt{1 - a^2}}$.

Ответы: а) 3 при $a = \pm 2$; б) 5 при $a = \pm 1$ (указание: избавьтесь от иррациональности в знаменателе).

4. Найдите величину $\sqrt{(8-a)(5+a)}$, если $\sqrt{8-a} + \sqrt{5+a} = 5$.

Ответ: 6 (указание: возведите в квадрат равенство $\sqrt{8-a} + \sqrt{5+a} = 5$).

5. Найдите сумму $\sqrt{25-a^2} + \sqrt{15-a^2}$, если разность $\sqrt{25-a^2} - \sqrt{15-a^2} = 2$.

Ответ: 5 (указание: умножьте равенство $\sqrt{25-a^2} - \sqrt{15-a^2} = 2$ на выражение $\sqrt{25-a^2} + \sqrt{15-a^2}$).

6. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} + \sqrt{x}\right) : \dfrac{x-1}{\sqrt{x} - 1}$;

б) $\left(\dfrac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) \cdot \left(\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a-b}\right)^2$;

в) $\dfrac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} : \dfrac{1}{\sqrt{x} - x^2} + x$;

г) $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+4\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

д) $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$;

е) $\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

ж) $\dfrac{\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\dfrac{2\sqrt{xy}}{y-x}$;

з) $a\left(\frac{2b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)+b\left(\frac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$;

и) $\left(\frac{\sqrt{a}+2}{a+2\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$;

к) $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+ab}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{\frac{a+b}{a}}\right):\sqrt{\frac{a}{a+b}}$;

л) $\frac{\sqrt{a}+1}{a\sqrt{a}+a+\sqrt{a}}:\frac{1}{a^2-\sqrt{a}}-a$;

м) $\left(\frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\frac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):4\sqrt{b}$.

Ответы: а) $\sqrt{x}+1$; б) 1; в) 1; г) $4x$; д) $-2\sqrt{x}$; е) $\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; ж) $-2y$; з) $2ab$; и) $\frac{2}{a-1}$; к) $\frac{a+b}{a}$; л) -1; м) $\frac{1}{2(a-b)}$.

7. Найдите значение выражения:

а) $2x^2-8\sqrt{5}x+23$ при $x=2\sqrt{5}-3$;

б) $x^2-8\sqrt{3}x+3$ при $x=4\sqrt{3}-1$;

в) $3x^2+4xy-3y^2$ при $x=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ и $y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

Ответы: а) 1; б) -44; в) $\frac{12+56\sqrt{10}}{3}$.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 421 (в, г); 422 (а–в); 423 (б, г, е); 424 (б, д); 425 (а); 427 (г, е); 429 (б, г); 431 (в, е); 433 (б, г, е); 434 (а); 437 (б); 438.

Урок 42. Контрольная работа № 4 по теме «Применение свойств квадратного корня»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 самые простые, варианты 3, 4 сложнее и варианты 5, 6 самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую свободу выбора учащимся. При таких же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла, вариантов 5, 6 – 1 балл (т. е. оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач).

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимися (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Упростите выражение $\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$.

2. Сравните числовые выражения $A=\frac{2}{7}\sqrt{7}$ и $B=\frac{1}{4}\sqrt{20}$.

3. Сократите дробь $\frac{9-a}{\sqrt{a}-3}$.

4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе выражения $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

5. Найдите значение выражения $\frac{1}{2\sqrt{3}+1}-\frac{1}{2\sqrt{3}-1}$.

6. Постройте график функции $y=\left(\sqrt{1-x}\right)^2$.

Вариант 2

1. Упростите выражение $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2$.

2. Сравните числовые выражения: $A=\frac{3}{5}\sqrt{20}$ и $B=\frac{2}{3}\sqrt{12}$.

3. Сократите дробь $\frac{16-c}{\sqrt{c}-4}$.

4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе выражения $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

5. Найдите значение выражения $\frac{1}{1+3\sqrt{5}}+\frac{1}{1-3\sqrt{5}}$.

6. Постройте график функции $y=\left(\sqrt{x-2}\right)^2$.

Вариант 3

1. Упростите выражение $2\sqrt{18}+5\sqrt{50}-\frac{1}{4}\sqrt{32}-7\sqrt{2}$.

2. Вычислите значение выражения $\left(2\sqrt{3}-1\right)\left(3\sqrt{3}+5\right)-7\sqrt{3}$.

3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе выражения $\frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$.

4. Сократите дробь $\frac{a^2+2a\sqrt{b}+b}{a+\sqrt{b}}$.

5. Сравните числовые выражения $A=\sqrt{20}-\sqrt{18}$ и $B=\sqrt{14}-\sqrt{12}$.

6. Постройте график функции $y=\frac{\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{|x-1|}$.

Вариант 4

1. Упростите выражение $2\sqrt{27}+4\sqrt{48}-\frac{1}{5}\sqrt{75}-9\sqrt{3}$.

2. Вычислите значение выражения $\left(3\sqrt{2}-2\right)\left(4\sqrt{2}+7\right)-13\sqrt{2}$.

3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе выражения $\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$.

4. Сократите дробь $\frac{4x^2-4x\sqrt{y}+y}{2x-\sqrt{y}}$.

5. Сравните числовые выражения $A=\sqrt{32}-\sqrt{31}$ и $B=\sqrt{43}-\sqrt{42}$.

6. Постройте график функции $y=\frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}{|x-2|}$.

Вариант 5

1. Найдите значение выражения $\left(2\sqrt{3}+5\right)^2+\left(10-\sqrt{3}\right)^2$.

2. Упростите выражение $\dfrac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}+\dfrac{a-1}{1+\sqrt{a}}-2\sqrt{a}$.

3. Вычислите: $\sqrt{\left(12-\sqrt{13}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{13}\right)^2}$.

4. Постройте график функции $y=\sqrt{x^2-4x+4}+x$.

5. Сравните числовые выражения $A=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ и $B=\sqrt{10}$.

6. Известно, что $\sqrt{28-a}-\sqrt{13-a}=3$. Найдите $\sqrt{28-a}+$ $+\sqrt{13-a}$.

Вариант 6

1. Найдите значение выражения $\left(3\sqrt{2}+2\right)^2+\left(6-\sqrt{2}\right)^2$.

2. Упростите выражение $\dfrac{a-2\sqrt{a}+1}{1-\sqrt{a}}+\dfrac{a-1}{1-\sqrt{a}}+2\sqrt{a}$.

3. Вычислите: $\sqrt{\left(15-\sqrt{11}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{11}\right)^2}$.

4. Постройте график функции $y=\sqrt{x^2-4x+4}-x$.

5. Сравните числовые выражения $A=\sqrt{2}+\sqrt{5}$ и $B=\sqrt{13}$.

6. Известно, что $\sqrt{39-a}+\sqrt{27-a}=4$. Найдите $\sqrt{39-a}-$ $-\sqrt{27-a}$.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ (число решивших задачу правильно или почти правильно);
± (число решивших задачу со значительными погрешностями);
– (число не решивших задачу);
∅ (число не решавших задачу).

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими их).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям и разобрать наиболее трудные варианты).

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. $14 - 4\sqrt{6}$.
2. $A < B$.
3. $-\sqrt{a} - 3$ (при $a \geq 0$, $a \neq 9$).
4. $2 + \sqrt{10}$.
5. $-\dfrac{2}{11}$.
6. Прямая $y = 1 - x$ при $x \leq 1$.

Вариант 2

1. $21 - 6\sqrt{6}$.
2. $A > B$.
3. $-\sqrt{c} - 4$ (при $c \geq 0$, $c \neq 16$).
4. $5 + \sqrt{15}$.
5. $-\dfrac{1}{22}$.
6. Прямая $y = x - 2$ при $x \geq 2$.

Вариант 3

1. $23\sqrt{2}$.
2. 13.
3. $6 + 3\sqrt{6}$.
4. $4 + \sqrt{b}$ (при $b \geq 0$, $a + \sqrt{b} \neq 0$).
5. $A < B$.
6. Прямая $y = 1$ при $x < 1$.

Вариант 4

1. $12\sqrt{3}$.
2. 10.
3. $10 + 3\sqrt{10}$.
4. $2x - \sqrt{y}$ (при $y \geq 0$, $2x - \sqrt{y} \neq 0$).
5. $A > B$.
6. Прямая $y = 1$ при $x > 2$.

Вариант 5

1. Используем формулы квадрата суммы и квадрата разности, выполним действия и получим

$$\left(2\sqrt{3} + 5\right)^2 + \left(10 - \sqrt{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 5 + 5^2 + 10^2 -$$

$$- 2 \cdot 10 \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 12 + 25 + 100 + 3 = 140.$$

Ответ: 140.

2. Разложим числители дробей на множители и сократим дроби. Имеем

$$\frac{a + \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} + \frac{a - 1}{1 + \sqrt{a}} - 2\sqrt{a} = \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a} + 1\right)}{1 + \sqrt{a}} + \frac{\left(\sqrt{a} - 1\right)\left(\sqrt{a} + 1\right)}{1 + \sqrt{a}} -$$

$$- 2\sqrt{a} = \sqrt{a} + \sqrt{a} - 1 - 2\sqrt{a} = -1.$$

Ответ: -1.

3. Извлечем квадратные корни из выражений и раскроем модули. Получаем

$$\sqrt{\left(12 - \sqrt{13}\right)^2} + \sqrt{\left(3 - \sqrt{13}\right)^2} = \left|12 - \sqrt{13}\right| + \left|3 - \sqrt{13}\right| = 12 - \sqrt{13} -$$

$$- \left(3 - \sqrt{13}\right) = 9.$$

Было учтено, что $\sqrt{13} \approx 3{,}6$.

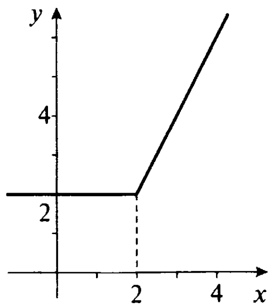
Ответ: 9.

4. Учитывая свойство арифметического квадратного корня, запишем функцию в виде

$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = \sqrt{(x-2)^2} + x = |x-2| + x.$$

Для построения графика функции $y = |x-2| + x$ раскроем знак модуля.

а) При $x < 2$ величина $x - 2 < 0$ и $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$. Поэтому функция имеет вид $y = 2 - x + x$ или $y = 2$. Строим график этой функции для $x < 2$.



б) При $x \geq 2$ величина $x - 2 \geq 0$ и $|x - 2| = x - 2$. Тогда функция имеет вид $y = x - 2 + x = 2x - 2$. Строим график этой функции для $x \geq 2$.

Ответ: см. график.

5. Очевидно, что выражения A и B являются положительными. Рассмотрим квадраты этих величин: $A^2 = \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = 3 + 2\sqrt{6} + {}$ $+ 2 = 5 + 2\sqrt{6}$ и $B^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10 = 5 + 5$. Теперь сравним числа $2\sqrt{6}$ и 5. Так как $6 < 6{,}25$, то $\sqrt{6} < \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ и $2\sqrt{6} < 5$. Поэтому $A^2 < B^2$ и $A < B$.

Ответ: $A < B$.

6. Умножим обе части равенства $\sqrt{28 - a} - \sqrt{13 - a} = 3$ на сопряженную величину $\sqrt{28 - a} + \sqrt{13 - a}$ и получим

$$\left(\sqrt{28 - a} - \sqrt{13 - a}\right)\left(\sqrt{28 - a} + \sqrt{13 - a}\right) = 3\left(\sqrt{28 - a} + \sqrt{13 - a}\right),$$

или $28 - a - (13 - a) = 3\left(\sqrt{28 - a} + \sqrt{13 - a}\right)$,

или $15 = 3\left(\sqrt{28 - a} + \sqrt{13 - a}\right)$, откуда $\sqrt{28 - a} + \sqrt{13 - a} = 5$.

Ответ: 5.

Вариант 6

1. Используем формулы квадрата суммы и квадрата разности, выполним действия и получим

$$\left(3\sqrt{2}+2\right)^2+\left(6-\sqrt{2}\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2+2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2+2^2+6^2-$$

$$-2\cdot 6\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=18+4+36+2=60.$$

Ответ: 60.

2. Разложим числители дробей на множители и сократим дроби. Имеем

$$\frac{a-2\sqrt{a}+1}{1-\sqrt{a}}+\frac{a-1}{1-\sqrt{a}}+2\sqrt{a}=\frac{\left(1-\sqrt{a}\right)^2}{1-\sqrt{a}}-\frac{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)}{1-\sqrt{a}}+$$

$$+2\sqrt{a}=1-\sqrt{a}-\left(1+\sqrt{a}\right)+2\sqrt{a}=1-\sqrt{a}-1-\sqrt{a}+2\sqrt{a}=0.$$

Ответ: 0.

3. Извлечем квадратные корни из выражений и раскроем модули. Получаем

$$\sqrt{\left(15-\sqrt{11}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{11}\right)^2}=\left|15-\sqrt{11}\right|+\left|2-\sqrt{11}\right|=15-\sqrt{11}-$$

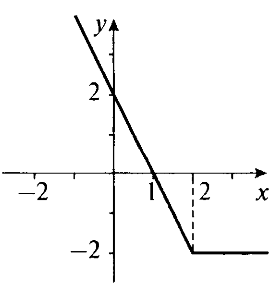
$$-\left(2-\sqrt{11}\right)=13.$$

Было учтено, что $\sqrt{11}\approx 3{,}3$.

Ответ: 13.

4. Учитывая свойство арифметического квадратного корня, запишем функцию в виде $y=\sqrt{x^2-4x+4}-x=\sqrt{(x-2)^2}-x=$ $=|x-2|-x$. Для построения графика функции $y=|x-2|-x$ раскроем знак модуля.

а) При $x<2$ величина $x-2<0$ и $|x-2|=-(x-2)=2-x$. Поэтому функция имеет вид $y=2-x-x$ или $y=2-2x$. Строим график этой функции для $x<2$.



б) При $x\geq 2$ величина $x-2\geq 0$ и $|x-2|=x-2$. Тогда функция имеет вид $y=x-2-x$ или $y=-2$. Строим график функции $y=-2$ для $x\geq 2$.

Ответ: см. график.

5. Очевидно, что выражения A и B являются положительными. Рассмотрим квадраты этих величин: $A^2 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)^2 = 2 + 2\sqrt{10} + 5 = 7 + 2\sqrt{10}$ и $B^2 = 13 = 7 + 6$. Теперь сравним числа $2\sqrt{10}$ и 6. Так как $10 > 9$, то $\sqrt{10} > 3$ и $2\sqrt{10} > 6$. Поэтому $A^2 > B^2$ и $A > B$.

Ответ: $A > B$.

6. Умножим обе части равенства $\sqrt{39 - a} + \sqrt{27 - a} = 4$ на сопряженную величину $\sqrt{39 - a} - \sqrt{27 - a}$ и получим:

$$\left(\sqrt{39 - a} + \sqrt{27 - a}\right)\left(\sqrt{39 - a} - \sqrt{27 - a}\right) = 4\left(\sqrt{39 - a} - \sqrt{27 - a}\right),$$

или $39 - a - (27 - a) = 4\left(\sqrt{39 - a} - \sqrt{27 - a}\right)$,

или $12 = 4\left(\sqrt{39 - a} - \sqrt{27 - a}\right)$, откуда $\sqrt{39 - a} - \sqrt{27 - a} = 3$.

Ответ: 3.

VI. Подведение итогов урока

Факультативный урок. Натуральные числа. Делимость натуральных чисел

Цели: напомнить основные сведения о множестве натуральных чисел и рассмотреть типовые задачи по теме.

Планируемые результаты: научиться решать задачи на делимость натуральных чисел.

Тип урока: урок общеметодологической направленности.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Работа по теме урока

План урока

1. Простые и составные натуральные числа.
2. Признаки делимости.
3. Деление натурального числа с остатком.
4. Запись числа в десятичной системе.
5. НОК и НОД натуральных чисел.

1. Простые и составные натуральные числа

Числа, которые используются для счета предметов, называются ***натуральными***: 1, 2, 3, 4, ... Множество натуральных чисел обозначают буквой N. Для того чтобы записать, что какое-либо число принадлежит рассматриваемому множеству, используют знак $\in$. Например, утверждение, что число 5 является натуральным (или что число 5 принадлежит множеству натуральных чисел N), можно записать так: $5 \in N$. Число 2,3 не является натуральным. Это можно записать с помощью знака $\notin$, т. е. $2{,}3 \notin N$.

Все натуральные числа (исключая число 1) делятся на *простые* и *составные* числа.

Число называется *составным*, если оно имеет хотя бы один делитель, который не равен самому числу или единице. Например, число 18 имеет такие делители: 2, 3, 6, 9. Поэтому число 18 является составным. (Разумеется, кроме перечисленных делителей, у числа 18 есть еще два делителя: 1 и 18.)

Число называется *простым*, если оно не имеет других делителей, кроме самого себя и единицы (например, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...).

Число 1 не является ни простым, ни составным.

2. Признаки делимости

Напомним основные признаки делимости натуральных чисел.

1. Число делится (без остатка, или нацело) на число 2, если его последняя цифра четная или 0. (Напомним, что число 0 не является ни четным, ни нечетным.) Например, число 35 63<u>4</u> делится на 2, а число 35 63<u>5</u> не делится.

2. Число делится на число 3, если сумма его цифр делится на 3. Например, число 33 606 делится на 3, так как сумма цифр этого числа $3 + 3 + 6 + 0 + 6 = 18$ делится на 3. Число 32 606 имеет сумму цифр $3 + 2 + 6 + 0 + 6 = 17$, которая на 3 не делится. Поэтому число 32 606 также на 3 не делится.

3. Число делится на число 4, если две его последние цифры образуют число, которое делится на 4, или являются нулями. Например, число 35 1<u>12</u> делится на 4, так как число, образованное двумя последними цифрами (число 12), делится на 4.

Обратите внимание на этот признак делимости. Очень часто школьники ошибочно сокращают его определение до следующего: число делится на число 4, если две его последние цифры делятся на 4. Разумеется, данный «признак делимости» является грубой ошибкой. В рассмотренном примере число 35 112 делилось на 4, хотя ни одна из его двух последних цифр (1 и 2) на 4 не делится.

Число 35 1<u>18</u> на число 4 не делится, так как число 18 (образованное двумя последними цифрами) на 4 не делится.

4. Число делится на число 5, если его последняя цифра 0 или 5. Например, числа 35 11<u>0</u> и 35 11<u>5</u> делятся на 5, а число 37 51<u>3</u> на 5 не делится.

5. Число делится на число 8, если три его последние цифры образуют число, которое делится на 8, или являются нулями. Например, число 37 408 делится на 8, так как число 408 делится на 8. Число 37 414 не делится на 8, так как число 414 не делится на 8.

6. Число делится на число 9, если сумма его цифр делится на 9. Например, число 71 505 делится на 9, так как сумма цифр этого числа $7 + 1 + 5 + 0 + 5 = 18$ делится на 9. Число 70 505 имеет сумму цифр $7 + 0 + 5 + 0 + 5 = 17$, которая на 9 не делится. Следовательно, и само число не делится на 9.

7. Число делится на число 10, если его последняя цифра нуль. Например, число 37 510 делится на 10, а число 37 515 не делится на 10.

Признаки делимости позволяют решать и более сложные задачи.

Пример 1

Определите, на какие из чисел: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 15, 18, 20 – делится без остатка число 357 120.

а) Число делится на 2, так как его последняя цифра нуль.

б) Число делится на 3, так как сумма цифр данного числа равна $3 + 5 + 7 + 1 + 2 + 0 = 18$ и делится на 3.

в) Число делится на 4, так как две его последние цифры образуют число 20, которое делится на 4.

г) Число делится на 5, так как его последняя цифра нуль.

д) Число делится на 6, так как $6 = 2 \cdot 3$ и из пунктов *а*, *б* следует, что число делится на 2 и 3 одновременно.

е) Число делится на 8, так как три его последние цифры образуют число 120, которое делится на 8.

ж) Число делится на 9, так как сумма его цифр 18 (пункт *б*) делится на 9.

з) Число делится на 10, так как его последняя цифра нуль.

и) Число делится на 15, так как оно одновременно делится на 3 и 5 (пункты *б*, *г*).

к) Число делится на 18, так как из пунктов *а*, *ж* следует, что оно делится на 2 и 9.

л) Число делится на 20, так как оно одновременно делится на 4 и 5 (пункты *в*, *г*).

Заметим, что при рассмотрении делимости числа 357 120 на 6, 15, 18, 20 мы каждое из этих чисел раскладывали на произведение взаимно простых чисел. Напомним, что *взаимно простыми* называются числа, которые не имеют общих делителей. Причем числа могут и не являться простыми. Например, числа

8 и 15 взаимно простые, так как не имеют общих множителей. Однако каждое из этих чисел – 8 и 15 – составное.

Например, в пункте *к* число 18 было представлено в виде произведения двух взаимно простых чисел – 2 и 9. Затем использовались признаки делимости на эти числа. Если раскладывать число-делитель на произведение не взаимно простых чисел, то решение усложняется и могут быть допущены ошибки. Например, число 30 не делится на 20 без остатка. Но если представить число 20 в виде $2 \cdot 10$, то 30 делится и на 2, и на 10. Однако числа 2 и 10 – не взаимно простые.

Пример 2

Определите, является ли число 98 706 540 321 простым или составным.

Используя признаки делимости, сразу определяем, что данное число на 2, 4, 5, 8, 10 не делится. Теперь разберемся, делится ли это число на 3 и на 9. Найдем сумму цифр этого числа: $9 + 8 + 7 + 0 + 6 + 5 + 4 + 0 + 3 + 2 + 1 = 45$. Так как число 45 делится на 3 и на 9, то данное число также делится на 3 и на 9. Так как данное число имеет делители (3 и 9), которые не равны ни единице, ни самому числу, то (по определению) оно является составным.

3. Деление натурального числа с остатком

Нужно заметить, что далеко не всегда одно натуральное число делится на другое без остатка. Например, при делении числа 29 на 3 получаем в частном 9 и в остатке 2. Эту операцию можно записать в виде $29 = 3 \cdot 9 + 2$, или *делимое* (29) = *делитель* (3) × × *частное* (9) + *остаток* (2). При этом остаток должен быть натуральным числом или нулем и меньше, чем делитель.

Пример 3

а) Число 29 можно также записать и в виде $29 = 3 \cdot 8 + 5$. Но в этом случае нельзя считать, что при делении числа 29 на число 3 получаются частное 8 и остаток 5, так как остаток не может быть больше делителя или равным ему.

б) Число 29 можно записать и в другом виде: $29 = 3 \cdot 10 + (-1)$. Но и в этом случае нельзя считать, что при делении числа 29 на число 3 получаются частное 10 и остаток (–1), так как остаток должен быть натуральным числом.

Таким образом, в общем случае деление с остатком записывается в виде $n = p \cdot k + r$. Здесь натуральное число n – делимое, натуральное число p – делитель, натуральное число k – частное, неотрицательное целое число r – остаток ($0 \le r < p$). Если $r = 0$, то число n нацело (без остатка) делится на число p и $n = p \cdot k$.

Такая форма записи деления числа с остатком позволяет решать различные задачи.

Пример 4

Число n дает при делении на 13 остаток 5. Какой остаток при делении на 13 дает число, вшестеро большее данного?

Если число n дает при делении на 13 остаток 5, то его можно записать в виде $n = 13 \cdot k + 5$, где k – получающееся при этом частное. Тогда число, вшестеро большее, т. е. $6n$ равно $6 \cdot (13 \cdot k + 5)$, или $78 \cdot k + 30$. Выделим из числа $6n$ наибольшее натуральное число, которое без остатка делится на 13, т. е. представим число $6n$ в виде $6n = (78k + 26) + 4 = 13 \cdot (6k + 2) + 4$. Из этой записи видно, что число $6n$ при делении на 13 дает в частном число $(6k + 2)$ и остаток 4.

Пример 5

Два числа при делении на 18 дают остаток 9. Докажите, что разность и сумма этих чисел без остатка делятся на 18.

Запишем первое число n в виде $n = 18p + 9$ (где p – частное), второе число m в виде $m = 18k + 9$ (где k – частное). Рассмотрим теперь разность этих чисел: $n - m = (18p + 9) - (18k + 9) = 18p - 18k = 18(p - k)$. Эта запись означает, что число $(n - m)$ при делении на 18 дает частное $(p - k)$, а остатка нет (т. е. он равен 0). Поэтому разность чисел n и m без остатка делится на 18.

Найдем сумму чисел n и m: $n + m = (18p + 9) + (18k + 9) = 18p + 18k + 18 = 18(p + k + 1)$. Из такой записи видно, что число $(n + m)$ при делении на 18 дает в частном число $(p + k + 1)$ и остатка нет. Поэтому сумма чисел n и m без остатка делится на 18.

Пример 6

Мальчик раскладывает коллекцию марок. Если он раскладывает по 3 марки, то в конце остаются 2 марки. Если он раскладывает по 4 марки, то в конце остаются 3 марки. Если он раскладывает по 7 марок, то в конце остаются 6 марок. И наконец, если он раскладывает по 11 марок, то в конце остаются 10 марок. Какое наименьшее число марок может быть в коллекции?

Легко сообразить, что если бы у мальчика была бы еще одна марка, то раскладывание марок по 3, 4, 7 и 11 штук происходило бы без остатка. Так как числа 3, 4, 7, 11 взаимно простые (т. е. не имеют общих делителей), то наименьшее число, которое без остатка делится на эти числа, это их произведение. Произведение чисел 3, 4, 7, 11 равно 924. На самом деле у мальчика на одну марку меньше, т. е. 923 марки. Легко проверить, что число 923 при делении на 3 дает остаток 2, при делении на 4 – остаток 3, при делении на 7 – остаток 6 и при делении на 11 – остаток 10, т. е. удовлетворяет условиям задачи.

Итак, наименьшее число марок в коллекции – 923.

4. Запись числа в десятичной системе

Любое натуральное число можно записать в десятичной системе счисления.

Пример 7

а) Число 526 можно записать в виде $526 = 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 1$, из чего видно, что число состоит из пяти сотен, двух десятков и шести единиц.

б) Число $\overline{abc}$ можно записать также в виде $\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$. Из этой записи видно, что число состоит из a сотен, b десятков и c единиц.

Заметим, что в записи $\overline{abc}$ черта сверху обязательна, так как эта запись обозначает трехзначное число, у которого первая цифра a, вторая – b и третья – c. Если черта сверху не поставлена, то запись abc обозначает произведение чисел a, b и c. Поэтому не путайте эти две формы записи. Также отметим, что если число состоит из конкретных цифр (например, 729), то черта сверху не нужна: всем понятно, что это число семьсот двадцать девять.

Рассмотрим теперь примеры на использование записи числа в десятичной системе счисления.

Пример 8

Известно, что шестизначное число $\overline{175X46}$ (X – число сотен) делится на 3. Найдите цифру X.

Используем признак делимости на 3 и найдем сумму цифр данного числа: $1 + 7 + 5 + X + 4 + 6 = 23 + X$. Так как число делится на 3, то и сумма его цифр $(23 + X)$ делится на 3. Легко сообразить, что при $X = 1$ сумма цифр равна 24 и делится на 3; при $X = 4$ сумма цифр равна 27 и делится на 3; при $X = 7$ сумма цифр равна 30 и делится на 3. Следующее число $X = 10$, и при этом $(23 + X)$ делится на 3. Но $X = 10$ не цифра $(0 \le X \le 9)$. Поэтому задача имеет только три решения: $X = 1$, $X = 4$, $X = 7$.

Пример 9

Выведите (докажите) признак делимости на 9.

Рассмотрим, например, трехзначное число $A = \overline{abc}$, которое можно записать в виде $A = 100 \cdot a + 10b + c$. В этом числе выделим слагаемые, которые всегда делятся на 9: $A = (99a + 9b) + (a + b + c)$. В этом выражении первое слагаемое $(99a + 9b) = 9 \cdot (11a + b)$ при всех цифрах a и b без остатка делится на 9. Поэтому, чтобы делилось на 9 все число A, необходимо, чтобы делилась на 9 оставшаяся часть, т. е. выражение $(a + b + c)$. Легко сообразить, что это выражение – сумма цифр данного числа $\overline{abc}$. Таким образом, число A делится на 9, если делится на 9 сумма цифр этого числа (т. е. число $a + b + c$).

Мы доказали этот признак делимости для трехзначного числа A. Разумеется, доказательство останется таким же, если рассмотреть число A, содержащее другое количество цифр.

Заметим, что приведенное доказательство также является и выводом признака делимости на 3.

Пример 10

Найдите все пятизначные числа вида $\overline{31X7Y}$, которые без остатка делятся на 15.

Так как число 15 можно представить в виде $15 = 3 \cdot 5$, то данное число будет делиться на 15, если оно будет делиться и на 3, и на 5. Для делимости на 5 требуется, чтобы последняя цифра числа Y равнялась нулю или пяти (т. е. $Y = 0$ или $Y = 5$).

Для делимости на 3 данного числа необходимо, чтобы сумма A его цифр, равная $A = 3 + 1 + X + 7 + Y = 11 + X + Y$, делилась на 3. При $Y = 0$ сумма цифр $A = 11 + X$ и тогда X может иметь решение $X = 1$, $X = 4$ и $X = 7$. При $Y = 5$ сумма цифр $A = 16 + X$ и возможны решения: $X = 2$, $X = 5$ и $X = 8$.

Итак, задача имеет шесть решений – это числа: 31 170, 31 470, 31 770, 31 275, 31 575 и 31 875.

Пример 11

Докажите, что если к двузначному числу приписать такое же число, то полученное четырехзначное число кратно 101.

Пусть дано двузначное число с цифрами a и b, т. е. $\overline{ab}$. Припишем к этому числу такое же и получим четырехзначное число $\overline{abab}$, которое в десятичной системе имеет вид $1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot a + b = 1010a + 101b = 101 \cdot (10a + b)$. Теперь мы видим, что полученное четырехзначное число делится на 101 без остатка.

5. НОК и НОД натуральных чисел

Как известно, составные натуральные числа могут быть разложены на множители. Часто требуется, чтобы такие множители были простыми числами. Любое составное число можно разложить на произведение простых множителей, причем единственным образом.

Разложение на простые множители начинают с наименьших простых чисел 2, 3, 5, используя признаки делимости. При этом последовательно производят деление данного числа на найденные простые делители. Результаты такого деления удобно записывать столбиком.

Пример 12

Разложите на простые множители число 9000.

9000	2
4500	2
2250	2
1125	3
375	3
125	5
25	5
5	5

Данное число 9000 по признаку делимости делится на 2. В результате получаем число 4500, которое также делится на 2. Имеем число 2250, которое также делится на 2. Разделив, получаем 1125. По признаку делимости это число делится на 3. Имеем число 375, которое также делится на 3. Разделив, получаем 125. Это число уже на 3 не делится, но делится на 5. Получаем 25. Такое число вновь делится на 5. Имеем 5. Это число является простым и делится только на само себя. Проследив за выполненными действиями (правая часть от вертикальной черты), запишем разложение данного числа на простые множители:

$9000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, или $9000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ (здесь учтено понятие степени натурального числа).

В тех случаях, когда данное число имеет другие простые делители (7, 11, 13 и т. д.), признаки делимости уже не помогают. Поэтому приходится проверять, делится ли число на такие числа непосредственным делением.

Пример 13

Разложите на простые множители число 11011.

11011	7
1573	11
143	11
13	13

По признакам делимости это число не делится на 2, 3, 5. Непосредственным делением убеждаемся, что это число делится на следующее простое число 7. Получаем 1573. Это число не делится на 7, но делится на следующее простое число 11. Имеем 143. Это число также делится на 11, и получаем 13. Число 13 – простое и делится только само на себя.

После этого выпишем разложение данного числа на простые множители: $11011 = 7 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13 = 7 \cdot 11^2 \cdot 13$.

Для нескольких натуральных чисел a, b, c, ... важнейшими понятиями являются наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель этих чисел.

Наименьшим общим кратным (*НОК*) натуральных чисел a, b, c, ... называется наименьшее натуральное число, которое нацело делится на эти числа a, b, c, ...

Для нахождения НОК чисел a, b, c, ...:

1) выписывают разложения на простые множители чисел a, b, c, ...;

2) перечисляют все простые множители, входящие хотя бы в одно из этих разложений;

3) каждый из перечисленных множителей возводят в максимальную степень, с которой этот множитель входит в разложения;

4) произведение полученных степеней простых множителей дает НОК чисел a, b, c, ...

Пример 14

Найдите наименьшее общее кратное чисел 48, 60, 72.

1) Разложим данные числа на простые множители:

48	2			72	2
24	2	60	2	36	2
12	2	30	2	18	2
6	2	15	3	9	3
3	3	5	5	3	3

Получаем: $48 = 2^4 \cdot 3$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$.

2) Хотя бы в одно из этих разложений входят числа 2, 3 и 5.

3) Наибольшая степень числа 2 – 4, числа 3 – 2, числа 5 – 1. Поэтому эти множители возведем в такие степени, т. е. 2^4; 3^2; 5^1 (или просто 5).

4) Найдем НОК $(48, 60, 72) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 16 \cdot 9 \cdot 5 = 720$. Это наименьшее число, которое без остатка делится и на 48, и на 60, и на 72. Легко сделать проверку: $720 : 48 = 15$, $720 : 60 = 12$, $720 : 72 = 10$.

Заметим, что вычисления НОК можно упростить, если учесть разложения данных чисел: НОК $= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = (2^4 \cdot 3) \cdot 3 \cdot 5 = 48 \cdot 15 = 720$. Здесь были сгруппированы множители таким образом, чтобы выделить разложение числа $48 = (2^4 \cdot 3)$.

Наибольшим общим делителем (***НОД***) натуральных чисел a, b, c, ... называется наибольшее натуральное число, на которое делятся нацело числа a, b, c, ...

Для нахождения НОД чисел a, b, c, ...:

1) выписывают разложения на простые множители чисел a, b, c, ...;

2) перечисляют все простые множители, входящие во все разложения;

3) каждый из перечисленных множителей возводят в минимальную степень, с которой этот множитель входит в разложения;

4) произведение полученных степеней этих множителей дает НОД чисел a, b, c, ...

Пример 15

Найдите наибольший общий делитель чисел 48, 60, 72.

1) Разложения данных чисел возьмем из предыдущего примера: $48 = 2^4 \cdot 3$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$.

2) Во все три разложения входят только множители 2 и 3.

3) Наименьшая степень числа 2 – 2, числа 3 – 1. Поэтому эти множители возведем в такие степени, т. е. 2^2, 3^1 (или просто 3).

4) Найдем НОД (48, 60, 72) = $2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$. Это наибольшее число, на которое нацело делятся числа 48, 60, 72. Сделаем проверку: $48 : 12 = 4$, $60 : 12 = 5$, $72 : 12 = 6$.

Понятия *НОК* и *НОД чисел* часто используются при решении задач.

Пример 16

Найдите все натуральные числа a и b, если НОД $(a, b) = 13$, НОК $(a, b) = 663$.

Разложим число 663 на простые множители: $663 = 3 \cdot 13 \cdot 17$. Из правил вычисления НОК и НОД следует, что множитель 13 входит в числа a и b, множители 3 и 17 могут входить только в одно из чисел a и b. Поэтому возможны только следующие варианты решения.

a	13	$3 \cdot 13 \cdot 17 = 663$	$3 \cdot 13 = 39$	$13 \cdot 17 = 221$
b	$3 \cdot 13 \cdot 17 = 663$	13	$13 \cdot 17 = 221$	$3 \cdot 13 = 39$

Итак, возможны четыре решения: $a = 13$, $b = 663$; $a = 663$, $b = 13$; $a = 39$, $b = 221$; $a = 221$, $b = 39$.

Заметим, что для двух чисел a и b всегда выполняется равенство НОД $(a, b) \cdot$ НОД $(a, b) = 13 \cdot 663 = 8619$. Для $a = 39$, $b = 221$ также получаем $a \cdot b = 39 \cdot 221 = 8619$. Это же справедливо и для других пар чисел a и b из этого примера.

Пример 17

Солдаты выстроились в ряды по 12 человек в каждом, а затем перестроились по 8 человек в ряду. Сколько было солдат, если их больше 180, но меньше 200?

Очевидно, что число солдат было таким, что оно без остатка делилось на 12 и на 8, т. е. это число или НОК (12, 8), или число, которое отличается от НОК в натуральное число раз. Поэтому прежде всего найдем НОК (12, 8) = 24.

Так как число солдат было значительно больше, то это число кратно 24, т. е. равно $24 \cdot n$ (где n – натуральное число). Легко подобрать подходящее $n = 8$. Тогда $24 \cdot n = 24 \cdot 8 = 192$. Это число солдат удовлетворяет всем условиям задачи: их число больше 180, но меньше 200. Кроме того, при построении в ряды по 12 человек получается 16 рядов, при построении по 8 человек получается 24 ряда.

Итак, солдат было 192 человека.

Пример 18

На базу прибыли три состава цистерн с нефтью: в первом составе было 360 т нефти, во втором – 432 т, в третьем – 792 т. Сколько цистерн было в каждом составе, если в каждой цистерне одинаковое и целое число тонн нефти и это число больше 50?

Очевидно, что в цистерне должно быть такое число тонн, чтобы оно было общим делителем чисел 360, 432 и 792. Разложим эти числа на простые множители:

		432	2		
360	2	216	2	792	2
180	2	108	2	396	2
90	2	54	2	198	2
45	3	27	3	99	3
15	3	9	3	33	3
5	5	3	3	11	11

Мы видим, что общими делителями данных чисел являются числа 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. Из них только число 72 удовлетворяет условию задачи. Отметим, что число 72 = НОД (360, 432, 792). Легко проверить, что в первом составе было 360 : 72 = 5 (цистерн), во втором – 432 : 72 = 6 (цистерн), в третьем – 792 : 72 = 11 (цистерн).

Итак, в каждой цистерне 72 т нефти.

III. Задания на уроке и на дом

1. Определите, на какие из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20 без остатка делится число:

а) 55 440; б) 145 860; в) 102 102; г) 435 435; д) 178 932; е) 63 240.

Ответы: а) 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20; б) 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15; в) 2, 3, 6; г) 3, 5, 15; д) 2, 3, 4, 6, 12; е) 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15.

2. Докажите, что число является составным.

а) 54 321; б) 54 213; в) $\underbrace{77\ldots7}_{365\text{ цифр}}1$; г) $\underbrace{55\ldots5}_{274\text{ цифры}}1$; д) $\underbrace{21\ldots21}_{570\text{ цифр}}3$; е) $\underbrace{72\ldots72}_{310\text{ цифр}}3$; ж) $10^{72} - 1$; з) $10^{37} - 1$; и) $100^{68} - 1$; к) $1000^{31} - 1$; л) $10^{53} - 7$; м) $10^{39} - 7$.

(Указание: используйте признаки делимости на 3 и 9.)

3. Определите цифру X, если число:

а) $\overline{3872X}$ кратно 4; б) $\overline{5163X}$ делится на 4; в) $\overline{72X31}$ кратно 3; г) $\overline{218X2}$ кратно 3; д) $\overline{315X42}$ кратно 18; е) $\overline{21X635}$ делится на 45;

ж) $\overline{314X2}$ кратно 8; з) $\overline{62X64}$ делится на 8; и) $\overline{91X72}$ кратно 24; к) $\overline{312X4}$ делится на 24.

Ответы: а) 0, 4, 8; б) 2, 6; в) 2, 5, 8; г) 2, 5, 8; д) 3; е) 1; ж) 3, 7; з) 0, 2, 4, 6, 8; и) 2, 8; к) 2 (указание: используйте соответствующие признаки делимости).

4. Определите цифры X и Y, если число:

а) $\overline{31X7Y}$ кратно 15; б) $\overline{23X57Y}$ делится на 12; в) $\overline{613XY}$ кратно 18; г) $\overline{42X5Y}$ делится на 45; д) $\overline{72X1Y}$ кратно 36; е) $\overline{127XY}$ делится на 20.

Ответы: а) $Y = 0$, $X = 1, 4, 7$; $Y = 5$, $X = 2, 5, 8$ (учесть признаки делимости на 3 и 5);

б) $Y = 2$, $X = 2, 5, 8$; $Y = 6$, $X = 1, 4, 7$ (учесть признаки делимости на 3 и 4);

в) $Y = 0$, $X = 8$; $Y = 2$, $X = 6$; $Y = 4$, $X = 4$; $Y = 6$, $X = 2$; $Y = 8$, $X = 0$; 9 (учесть признаки делимости на 2 и 9);

г) $Y = 0$, $X = 7$; $Y = 5$, $X = 2$ (учесть признаки делимости на 5 и 9);

д) $Y = 2$, $X = 6$; $Y = 4$, $X = 4$ (учесть признаки делимости на 4 и 9);

е) $Y = 0$, $X = 0, 2, 4, 6, 8$ (учесть признаки делимости на 4 и 5).

5. Докажите, что:

а) если a кратно 3, b кратно 5, то $5a + 3b$ кратно 15;

б) если a кратно 4, b кратно 7, то $7a + 7b$ кратно 28;

в) если a кратно 2, b кратно 5, то $5a - 2b$ кратно 10;

г) если a кратно 6, b кратно 7, то $7a - 6b$ кратно 42.

6. Число a при делении на 11 дает остаток 3. Найдите остаток при делении на 11 числа:

а) $5a$; б) $4a + 3$; в) a^2; г) $a^2 + 5$; д) $a^2 + 2a$; е) a^3.

Ответы: а) 4; б) 4; в) 9; г) 3; д) 4; е) 5 (указание: число a запишите в виде $a = 11k + 3$, где k — частное).

7. Число a при делении на 24 дает остаток 9. Найдите остаток от деления числа a на:

а) 2; б) 3; в) 4; г) 6; д) 8; е) 12.

Ответы: а) 1; б) 0; в) 1; г) 3; д) 1; е) 9 (указание: число a запишите в виде $a = 24k + 9$. Тогда: а) $a = 2 \cdot (12k + 4) + 1$, т. е. число a при делении на 2 дает остаток 1; б) $a = 3 \cdot (8k + 3)$, т. е. число a кратно 3 (остаток равен 0); в) $a = 4 \cdot (6k + 2) + 1$, т. е. число a при делении на 4 дает остаток 1; г) $a = 6 \cdot (4k + 1) + 3$, т. е. число a при делении на 6 дает остаток 3; д) $a = 8 \cdot (3k + 1) + 1$, т. е. число a при делении на 8 дает остаток 1; е) $a = 12 \cdot 2k + 9$, т. е. число a при делении на 12 дает остаток 9).

8. Найдите все числа, которые при делении на 3 дают остаток 1, а при делении на 5 дают остаток 3. Найдите остаток от деления таких чисел на 15.

Ответ: $15p + 13$, где p – целое; 13 (указание: числа, которые при делении на 3 дают остаток 1, имеют вид $3k + 1$. Числа, которые при делении на 5 дают остаток 3, имеют вид $5n + 3$. Очевидно, что $3k + 1 = 5n + 3$. Выразим: $n = \frac{3k-2}{5}$. При этом n и k должны быть целыми числами. Например, при $k = 4$ получим целое $n = \frac{3 \cdot 4 - 2}{5} = 2$. Легко сообразить, что все целые k, удовлетворяющие условию $n = \frac{3k-2}{5}$, имеют вид $k = 4 + 5p$ (где p – целое число). Тогда искомое число $3k + 1 = 3(4 + 5p) + 1 = 15p + 13$, т. е. при делении на 15 дает остаток 13).

9. Найдите все числа, которые при делении на 4 дают остаток 3, а при делении на 6 дают остаток 1. Найдите остаток от деления таких чисел на 2, 3, 12.

Ответ: $12p + 7$, где p – целое; остатки 1, 1, 7 соответственно (указание: числа, которые при делении на 4 дают остаток 3, имеют вид $4k + 3$. Числа, которые при делении на 6 дают остаток 1, имеют вид $6n + 1$. Очевидно, что $4k + 3 = 6n + 1$. Выразим: $k = \frac{6n-2}{4} = \frac{3n-1}{2}$. При этом n и k должны быть целыми числами. Например, при $n = 1$ получим целое $k = \frac{3 \cdot 1 - 1}{2} = 1$. Легко сообразить, что все целые n, удовлетворяющие условию $k = \frac{3n-1}{2}$, имеют вид $n = 1 + 2p$ (где p – целое число). Тогда искомое число $6n + 1 = 6(1 + 2p) + 1 = 12p + 7$. Аналогично задаче 7 легко установить, что это число при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 – тоже остаток 1, при делении на 12 – остаток 7.)

10. Разложите на простые множители и найдите НОК и НОД чисел: а) 648 и 108; б) 10 125 и 675; в) 3780 и 1800; г) 300 и 4410.

Ответы: а) $648 = 2^3 \cdot 3^4$, $108 = 2^2 \cdot 3^3$, НОК $= 2^3 \cdot 3^4 = 648$, НОД $= 2^2 \cdot 3^3 = 108$;

б) $10\,125 = 3^4 \cdot 5^3$, $675 = 3^3 \cdot 5^2$, НОК $= 3^4 \cdot 5^3 = 10\,125$, НОД $= 3^3 \cdot 5^2 = 675$;

в) $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$, $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, НОК $= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 37\,800$, НОД $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$;

г) $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, $4410 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$, НОК $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 44\,100$, НОД $= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

IV. Контрольные вопросы

1. Какие числа называются натуральными? Как обозначается множество натуральных чисел?

2. Расскажите о простых и составных числах. Приведите примеры.
3. Расскажите о признаках делимости натуральных чисел.
4. Докажите признаки делимости натуральных чисел.
5. Расскажите о делении числа с остатком.
6. Расскажите о наименьшем общем кратном натуральных чисел.
7. Расскажите о правиле нахождения НОК чисел.
8. Расскажите о наибольшем общем делителе натуральных чисел.
9. Расскажите о правиле нахождения НОД чисел.
10. Как записывают числа в десятичной системе счисления? Приведите примеры.

V. Подведение итогов урока

Факультативный урок. Решение уравнений в целых числах

Цели: напомнить основные сведения о целых числах и рассмотреть типовые задачи.

Планируемые результаты: научиться решать уравнения в целых числах.

Тип урока: урок-практикум.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Работа по теме урока

К целым числам относятся натуральные числа (1, 2, 3, ...); числа, противоположные натуральным (–1, –2, –3, ...), и число нуль (0). Множество целых чисел обозначают буквой Z.

Пример 1

Найдите решения уравнения $(5x - 3)(3x + 6) \cdot (2x - 4) = 0$, которые являются целыми числами.

Левая часть уравнения является произведением трех сомножителей, и так как такое произведение равно нулю, то один из сомножителей равен нулю. Поэтому надо рассмотреть три случая.

а) Первый множитель равен нулю, т. е. $5x - 2 = 0$. Решаем это линейное уравнение: $5x = 2$ и $x = \frac{2}{5}$. Однако найденное решение не является целым числом и условию задачи не удовлетворяет.

б) Второй множитель равен нулю, т. е. $3x + 6 = 0$, или $3x = -6$, и $x = -2$. Это число действительно является целым числом и будет корнем уравнения.

в) Третий множитель равен нулю, т. е. $2x - 4 = 0$, или $2x = 4$, и $x = 2$. Это также целое число, оно является решением уравнения.

Итак, уравнение имеет два целых корня: $x = -2$ и $x = 2$.

В более сложных уравнениях левую часть предварительно надо разложить на множители.

Пример 2

Найти целочисленные решения уравнения $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$.

Прежде всего вынесем x за скобки: $x(x^2 + 2x - 3) = 0$. Левая часть уравнения разложена на два множителя, и их произведение равно нулю. Поэтому один из сомножителей равен нулю. Рассмотрим два случая:

а) $x = 0$. Так как это целое число, то оно и является решением задачи;

б) $x^2 + 2x - 3 = 0$. Далее это уравнение можно решать как квадратное (см. тему 3), можно разложить его левую часть на множители. Воспользуемся последним способом. Для этого представим $2x$ в виде $2x = 3x - x$ и сгруппируем члены в левой части уравнения: $x^2 + 2x - 3 = x^2 + 3x - x - 3 = (x^2 + 3x) - (x + 3) = x(x + 3) - (x + 3) = (x + 3)(x - 1)$. После этого уравнение имеет вид $(x + 3) \cdot (x - 1) = 0$. Поэтому снова надо рассмотреть два случая: или $x + 3 = 0$ (откуда $x = -3$), или $x - 1 = 0$ (откуда $x = 1$). Эти два числа являются целыми и также будут решениями задачи.

Следовательно, уравнение имеет три целочисленных решения: $x = 0$, $x = -3$, $x = 1$.

Более сложный подход используется при решении уравнений с двумя неизвестными – делимость целых чисел.

Пример 3

Найдите такие целые значения x и y, которые являются решениями уравнения $(x + 3)(y - 2) = 7$.

Прежде всего отметим, что если x и y – числа не целые, то уравнение имеет бесконечное множество решений. Например, возьмем любое значение x (пусть $x = -0{,}5$) и найдем для него y, которое является решением данного уравнения. Подставим $x = -0{,}5$ в уравнение: $(-0{,}5 + 3)(y - 2) = 7$, или $2{,}5(y - 2) = 7$, или $y - 2 = 2{,}8$, откуда $y = 4{,}8$.

Однако по условию задачи числа x и y целые. Поэтому числа $(x + 3)$ и $(y - 2)$ также целые. Левая часть уравнения представляет собой произведение двух целых чисел. Поэтому разложим и правую часть уравнения на произведение двух целых чисел: $7 = 1 \cdot 7$, или $7 = (-1) \cdot (-7)$. Далее необходимо рассмотреть четыре случая:

а) $\begin{cases} x + 3 = 1, \\ y - 2 = 7, \end{cases}$ откуда находим $x = -2$, $y = 9$;

б) $\begin{cases} x + 3 = 7, \\ y - 2 = 1, \end{cases}$ и получаем $x = 4$, $y = 3$;

в) $\begin{cases} x + 3 = -1, \\ y - 2 = -7, \end{cases}$ и имеем $x = -4$, $y = -5$;

г) $\begin{cases} x + 3 = -7, \\ y - 2 = -1, \end{cases}$ и получаем $x = -10$, $y = 1$.

Таким образом, уравнение имеет четыре целочисленных решения: $x = -2$, $y = 9$; $x = 4$, $y = 3$; $x = -4$, $y = -5$; $x = -10$, $y = 1$.

В более сложных случаях левая часть уравнения раскладывается предварительно на множители.

Пример 4

Найдем таких два целых числа, чтобы их сумма равнялась их произведению.

Пусть одно из этих чисел x, второе — y. Сразу получаем уравнение $x + y = xy$. Запишем уравнение в виде $x + y - xy = 0$ и разложим его левую часть на множители: $(x - xy) + y = 0$, $x(1 - y) + (y - 1) + 1 = 0$, $x(1 - y) - (1 - y) + 1 = 0$, $(1 - y)(x - 1) + 1 = 0$, или $(1 - y)(x - 1) = -1$. Теперь левая часть уравнения разложена на множители, и так как x и y — целые числа, то и $(1 - y)$, $(x - 1)$ — целые числа. Правая часть также может быть представлена в виде произведения двух целых чисел: $-1 = 1 \cdot (-1)$. Далее рассмотрим два случая:

а) $\begin{cases} 1 - y = 1, \\ x - 1 = -1, \end{cases}$ откуда находим $x = 0$, $y = 0$;

б) $\begin{cases} 1 - y = -1, \\ x - 1 = 1, \end{cases}$ откуда находим $x = 2$, $y = 2$.

Итак, есть только две пары таких чисел: 0 и 0 или 2 и 2.

Достаточно часто подобные уравнения могут вообще не иметь целочисленных решений.

Пример 5

Докажем, что не существует таких целых чисел x и y, которые являются решением уравнения $x(x + 1) = 2y + 1$.

В левую часть уравнения входят два последовательных целых числа x и $(x + 1)$, поэтому одно из них будет четным. Следовательно, левая часть уравнения является числом четным. Правая часть при целых y является числом нечетным, так как имеет вид $2y + 1$ (число при делении на 2 дает остаток 1).

Так как четное число не может равняться нечетному числу, то целых x и y, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

Пример 6

На автобазе есть машины грузоподъемностью 7 т и 10 т. Надо перевезти 125 т груза, используя эти машины и загружая их полностью. Сколько и каких машин надо использовать? Как ограничиться наименьшим числом машин?

Пусть было взято x семитонных и y десятитонных машин. Тогда семитонные машины перевезут $7x$ тонн груза, десятитонные машины – $10y$ тонн. Получаем уравнение $7x + 10y = 125$. Найдем из этого уравнения y:

$$y = \frac{125 - 7x}{10} = \frac{120 + (5 - 7x)}{10} = 12 + \frac{5 - 7x}{10}.$$

Так как 12 – число натуральное, то y будет также натуральным, если дробь $\frac{5 - 7x}{10}$ станет целым числом.

Это возможно, если целое число $(5 - 7x)$ будет кратно 10. Легко подобрать такие натуральные x, удовлетворяющие этому условию: $x = 5, 15, 25, \ldots$. Однако y должно быть числом натуральным, поэтому $125 - 7x \geq 0$. Отсюда $x \leq \frac{125}{7} = 17\frac{6}{7}$. Следовательно, из подобранных x подходят только два: $x = 5$ (для него $y = 9$) и $x = 15$ (для него $y = 2$).

При этом в первом случае потребуется наименьшее число машин: $x + y = 5 + 9 = 14$. Действительно, по возможности (чтобы машины были полностью загружены) надо использовать минимальное число машин малой грузоподъемности и максимальное – большой, что и выполняется для первого случая.

Ответ: надо взять 5 семитонных и 9 десятитонных машин или 15 семитонных и 2 десятитонные машины, в первом случае будет использовано наименьшее число машин (14).

Пример 7

Докажите, что уравнение $49x^3 - 63x^2 + 56x - 456 = 0$ не имеет целых корней.

Запишем уравнение в виде $49x^3 - 63x^2 + 56x = 456$. В левой части уравнения все коэффициенты при различных степенях неизвестной x кратны 7. Поэтому при любом целом значении x значение выражения $49x^3 - 63x^2 + 56x$ кратно 7. В правой части уравнения находится число 456, которое делится на 7 с остатком 1. Получаем противоречие. Поэтому данное уравнение не имеет целых корней.

Пример 8

В оздоровительном детском лагере имеются четырехместные и восьмиместные комнаты. Можно ли разместить в лагере 426 детей так, чтобы в комнатах не было свободных мест?

Пусть детей удалось разместить, и было задействовано x четырехместных и y восьмиместных комнат. При этом все места в комнатах заняты. Тогда в четырехместных комнатах будут размещены $4x$ детей, в восьмиместных комнатах – $8y$ детей. Так как общее число детей 426, то получаем уравнение $4x + 8y = 426$. Числа x и y по условию целые. Поэтому числа $4x$ и $8y$ кратны 4. Следовательно, значение выражения $4x + 8y$ кратно 4. Правая часть уравнения 426 делится на 4 с остатком 2. Получаем противоречие. Поэтому уравнение $4x + 8y = 426$ не имеет решений в целых числах. Итак, разместить детей требуемым образом не удается.

III. Задания на уроке и на дом

1. Найдите целочисленные решения уравнения:

а) $(3x - 1)(4 - 2x)(5x + 9) = 0$;

б) $(3 + 2x)(4x + 8)(x - 3) = 0$;

в) $(4x - 3)(6 + 2x)(5 + 3x) = 0$;

г) $(3x + 4)(2x + 6)(3x - 9) = 0$.

Ответы: а) 2; б) –2 и 3; в) –3; г) –3 и 3.

2. Решите уравнение в целых числах:

а) $x^2 + 2x - 3 = 0$; г) $3x^2 - x - 2 = 0$;

б) $x^2 - 2x - 8 = 0$; д) $3x^3 + 7x^2 + 2x = 0$;

в) $2x^2 + x - 1 = 0$; е) $2x^3 - x^2 - 6x = 0$.

Ответы: а) –3 и 1; б) –2 и 4; в) –1; г) 1; д) –2 и 0; е) 0 и 2 (указание: разложите на множители левую часть уравнения).

3. Найдите целочисленные решения уравнения:

а) $(x - 1)(y + 2) = 3$; г) $xy + 2x - y = 5$;

б) $(x - 2)(y + 1) = 5$; д) $x^2 + 5xy + 6y^2 = 3$;

в) $xy + 3x + 2y = 1$; е) $2x^2 + 3xy + y^2 = 5$.

Ответы: а) (4; –1), (2; 1), (–2; –3), (0; –5);

б) (3; 4), (1; –6), (7; 0), (–3; –2);

в) (5; –2), (–9; –4), (–1; 4), (–3; –10);

г) (4; –1), (–2; –3), (2; 1), (0; –5);

д) (–3; 2), (3; –2), (7; –2), (–7; 2);

е) (4; –3), (–4; 3), (–4; 9), (4; –9).

(Указание: в, г – выразите любую неизвестную через другую; д, е – разложите левую часть уравнения на множители.)

4. При каких целых значениях a дробь A также будет целым числом?

а) $A = \dfrac{7a^3 - 5a^2 + 3a - 4}{a}$; г) $A = \dfrac{15a^2 + 7a + 3}{3a + 2}$;

б) $A = \dfrac{8a^3 + 5a^2 - 4a + 3}{a}$; д) $A = \dfrac{6a^2 + a - 5}{2a + 1}$;

в) $A = \dfrac{6a^2 - 5a - 2}{2a - 1}$; е) $A = \dfrac{6a^2 - 5a + 4}{2a - 3}$.

Ответы: а) ±1, ±2, ±4; б) ±1, ±3; в) 0, ±1, 2; г) ±1; д, е) таких a нет (указание: в выражении A выделите целую и дробную части).

5. Докажите, что уравнение не имеет целых корней:

а) $3x^2 - 9x - 301 = 0$;

б) $8x^2 - 12x - 506 = 0$;

в) $11x^3 + 22x^2 - 44x + 67 = 0$;

г) $5x^4 - 100x^3 + 25x^2 - 10x + 17 = 0$.

(Указание: учтите делимость коэффициентов уравнения.)

6. Докажите, что на данной прямой нет ни одной точки с целочисленными координатами.

а) $123x + 612y = 2515$; в) $315x + 85y = 714$;

б) $104x + 316y = 7613$; г) $77x + 121y = 1376$.

(Указание: при целых значениях x и y: а) левая часть кратна 3, правая делится на 3 с остатком; б) левая часть кратна 4, правая делится на 4 с остатком; в) левая часть кратна 5, правая делится на 5 с остатком; г) левая часть кратна 11, правая делится на 11 с остатком.)

7. При любом целом значении n найдите остаток от деления выражения на 5:

а) $(4n + 3)(6n - 7) - (2n + 1)(2n - 1)$;

б) $(7n + 3)(n - 1) + (3n + 1)(n + 1)$;

в) $(6n + 1)(n + 5) - (2n + 2)(3n - 5)$;

г) $(4n + 1)(n + 1) + n^2 + 3$.

Ответ: а) 0; б) 3; в) 0; г) 4 (указание: раскройте скобки и упростите выражение).

8. Докажите, что при любом целом n:

а) $n(n + 1)$ делится на 2;

б) $n(n + 1)(n + 2)$ делится на 6;

в) $n^2 + 3n$ делится на 2;

г) $n^3 - n$ делится на 6;

д) $n^7 - n$ делится на 6;

е) $n^3 + 3n^2 + 2n$ делится на 6.

(Указание: а) n и $n + 1$ – два последовательных целых числа, и одно из них делится на 2;

б) n, $n + 1$ $n + 2$ – три последовательных целых числа, одно из них кратно 2, другое кратно 3;

в) запишите в виде $n^3 + 3n = n(n + 3)$ и покажите, что одно из чисел n и $n + 3$ четное;

г) запишите в виде $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$ и учтите указание *б*;

д) запишите в виде $n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n^3 - 1)(n^3 + 1) = n(n - 1)(n^2 + n + 1) \cdot (n + 1)(n^2 - n + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$ и для чисел $n - 1$, n, $n + 1$ учтите указание *б*;

е) запишите в виде $n^3 + 2n^2 + 2n = n(n^2 + 3n + 2) = n(n + 1)(n + 2)$ и учтите указание *б*.)

9. Докажите, что:

а) $n^2 - 1$ делится на 8, если $n^2 - 1$ делится на 2;

б) $n^3 - 4n$ делится на 48, если $n^3 - 4n$ делится на 2.

Решение:

а) $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$. Очевидно, что $n - 1$ и $n + 1$ – два последовательных четных числа. Тогда одно из них делится на 2, другое – на 4. Произведение таких чисел делится на $2 \cdot 4 = 8$;

б) $n^3 - 4n = n(n^2 - 4) = (n - 2)n(n + 2)$. Так как это число делится на 2, то $n - 2$, n, $n + 2$ – три последовательных четных числа. Тогда одно из них делится на 2, другое – на 4, третье – на 6. Произведение таких чисел делится на $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$.

IV. Подведение итогов урока

Факультативный урок. Зачетная работа по теме «Квадратные корни»

Цель: проверить знания учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика зачетной работы

По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно, у учащихся появляется свобода выбора задач. Все задания разбиты на три блока: А, В и С. Самые простые задачи находятся в блоке А, более сложные – в блоке В, еще сложнее – в блоке С. Каждая задача из блока А оценивается в 1 балл, из блока В – в 2 балла, из блока С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий отдельное занятие можно и не посвящать (решения задач можно вывесить на стенде). Для этого приводится разбор заданий.

III. Зачетная работа

А

1. Вычислите: $\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+\sqrt{98}-2\sqrt{32}\right)$.

2. Сравните числа $3\sqrt{7}$ и $\sqrt{62}$.

3. Найдите значение выражения $\sqrt{8-\sqrt{15}}\cdot\sqrt{\sqrt{15}+8}$.

4. Сократите дробь $\dfrac{3-\sqrt{3}a}{a^2-3}$.

5. Решите уравнение $\sqrt{x^2-6x+9}=2$.

6. Упростите выражение $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{x+4\sqrt{xy}+4y}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$ и найдите его значение при $x=3\dfrac{1}{81}$ и $y=\dfrac{1}{81}$.

7. Постройте график функции $y=5\sqrt{x}-3\sqrt{-x}$.

В

8. Известно, что $x=3-\sqrt{11}$ и $y=3+\sqrt{11}$. Найдите значение выражения $y\sqrt{x^2}$.

9. Упростите выражение $\left(\dfrac{a}{a-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{a+\sqrt{2}}\right):\dfrac{a^2+2}{a^2+a\sqrt{2}}$.

10. Сравните числа $A=\dfrac{3}{4-2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{4+2\sqrt{2}}$ и $B=\sqrt{7}$.

11. Решите уравнение $\sqrt{3+\sqrt{2-x}}=4$.

С

12. Сократите дробь $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}+a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}$.

13. Упростите выражение
$\left(\sqrt{2}+1\right)^2-\left(\sqrt{2}-3\right)^2-\sqrt{32}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}$.

14. Постройте график зависимости $y(x)$, если выполнено условие $\sqrt{y^2-2x^2+1}=1-y$.

IV. Разбор заданий

1. В скобках вынесем множители из-под знаков корня и приведем подобные члены. Получаем

$$\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+\sqrt{98}-2\sqrt{32}\right)=\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+\sqrt{49\cdot 2}-2\sqrt{16\cdot 2}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+7\sqrt{2}-2\cdot 4\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=4.$$

Ответ: 4.

2. В первом числе внесем множитель под знак корня: $3\sqrt{7}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{9\cdot 7}=\sqrt{63}$. Так как $63>62$, то и $\sqrt{63}>\sqrt{62}$, т. е. $3\sqrt{7}>\sqrt{62}$.

Ответ: $3\sqrt{7}>\sqrt{62}$.

3. Учтем теорему о произведении корней и формулу разности квадратов. Получим

$$\sqrt{8-\sqrt{15}}\cdot\sqrt{\sqrt{15}+8}=\sqrt{\left(8-\sqrt{15}\right)\left(8+\sqrt{15}\right)}=\sqrt{8^2-\left(\sqrt{15}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{64-15}=\sqrt{49}=7.$$

Ответ: 7.

4. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим дробь:

$$\frac{3-\sqrt{3}a}{a^2-3}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{a^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-a\right)}{\left(a-\sqrt{3}\right)\left(a+\sqrt{3}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{a+\sqrt{3}}$$

(при $a\neq\pm\sqrt{3}$).

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{3}}{a+\sqrt{3}}$.

5. Учтем свойства квадратного корня и получим уравнение $\sqrt{x^2-6x+9}=2$, или $\sqrt{(x-3)^2}=2$, или $|x-2|=2$. Тогда величина $x-3=\pm 2$, откуда $x_1=5$ и $x_2=1$.

Ответ: $x_1=5$, $x_2=1$.

6. Разложим числители и знаменатели дробей на множители и сократим дроби. Получаем

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{x+4\sqrt{xy}+4y}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-$$

$$-\frac{\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}-\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)=-3\sqrt{y}.$$

Теперь подставим данное значение $y=\dfrac{1}{81}$ и найдем

$$-3\sqrt{\frac{1}{81}}=-3\cdot\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}.$$

Ответ: $-3\sqrt{y}$; $-\frac{1}{3}$.

7. Область определения функции $y = 5\sqrt{x} - 3\sqrt{-x}$ задается условиями: $x \geq 0$ и $-x \geq 0$ (подкоренные выражения неотрицательны). Эта система неравенств имеет единственное решение $x = 0$. Тогда и $y = 0$. Поэтому графиком данной функции является единственная точка (0; 0) – начало координат.

Ответ: начало координат.

8. По свойству арифметического квадратного корня $y\sqrt{x^2} = y|x|$. Теперь подставим данные значения $x = 3 - \sqrt{11}$ и $y = 3 + \sqrt{11}$ и получим:

$$\left(3+\sqrt{11}\right)\left|3-\sqrt{11}\right| = \left(3+\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{11}-3\right) = \left(\sqrt{11}\right)^2 - 3^2 = 11 - 9 = 2.$$

Учтено, что $3 < \sqrt{11}$ и $\left|3-\sqrt{11}\right| = -\left(3-\sqrt{11}\right) = \sqrt{11} - 3$.

Ответ: 2.

9. В скобках приведем дроби к общему знаменателю и вычтем их. Имеем:

$$\left(\frac{a}{a-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{a+\sqrt{2}}\right) : \frac{a^2+2}{a^2+a\sqrt{2}} = \frac{a\left(a+\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(a-\sqrt{2}\right)}{\left(a-\sqrt{2}\right)\left(a+\sqrt{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{a^2+a\sqrt{2}}{a^2+2} = \frac{a^2+a\sqrt{2}-a\sqrt{2}+2}{\left(a-\sqrt{2}\right)\left(a+\sqrt{2}\right)} \cdot \frac{a\left(a+\sqrt{2}\right)}{a^2+2} =$$

$$= \frac{\left(a^2+2\right)a\left(a+\sqrt{2}\right)}{\left(a-\sqrt{2}\right)\left(a+\sqrt{2}\right)\left(a^2+2\right)} = \frac{a}{a-\sqrt{2}} \text{ (при } a \neq 0;\ \pm\sqrt{2}).$$

Ответ: $\frac{a}{a-\sqrt{2}}$.

10. В числе A сложим дроби и получим:

$$A = \frac{3}{4-2\sqrt{2}} + \frac{3}{4+2\sqrt{2}} = \frac{3\left(4+2\sqrt{2}\right)+3\left(4-2\sqrt{2}\right)}{\left(4-2\sqrt{2}\right)\left(4+2\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{3\left(4+2\sqrt{2}+4-2\sqrt{2}\right)}{4^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3\cdot 8}{16-8} = 3.$$

Так как $3 > \sqrt{7}$, то $A > B$.

Ответ: $A > B$.

11. Обе части уравнения $\sqrt{3+\sqrt{2-x}} = 4$ возведем в квадрат: $3 + \sqrt{2-x} = 16$. Выразим: $\sqrt{2-x} = 13$. Еще раз возведем обе части этого уравнения в квадрат: $2 - x = 169$, откуда $x = -167$.

Ответ: $x = -167$.

12. Сгруппируем члены в числителе и знаменателе, разложим их на множители и сократим дробь. Получаем:

$$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}+a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}=\frac{\left(a\sqrt{a}-a\sqrt{b}\right)+\left(b\sqrt{b}-b\sqrt{a}\right)}{\left(a\sqrt{a}+a\sqrt{b}\right)-\left(b\sqrt{b}+b\sqrt{a}\right)}=$$

$$=\frac{a\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)-b\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-b\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)(a-b)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(a-b)}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

13. Прежде всего надо заметить, что подкоренные выражения являются полными квадратами:

$$3-2\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 1+1^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2 \text{ и}$$

$$11+6\sqrt{2}=9+2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+2=3^2+2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(3+\sqrt{2}\right)^2.$$

После этого легко упростить данное выражение:

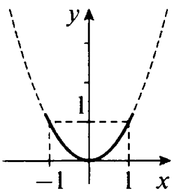
$$\left(\sqrt{2}+1\right)^2-\left(\sqrt{2}-3\right)^2-\sqrt{32}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}=$$

$$=2+2\sqrt{2}+1-2+6\sqrt{2}-9-4\sqrt{2}-\left|\sqrt{2}-1\right|+\left|3+\sqrt{2}\right|=$$

$$=-8+4\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(3+\sqrt{2}\right)=-4+4\sqrt{2}.$$

Ответ: $-4+4\sqrt{2}$.

14. Так как левая часть равенства $\sqrt{y^2-2x^2+1}=1-y$ по определению арифметического квадратного корня неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной, т. е. $1-y\geq 0$, откуда $y\leq 1$. Возведем в квадрат обе части данного равенства: $y^2-2x^2+1=(1-y)^2$ (при этом подкоренное выражение y^2-2x^2+1 неотрицательно, так как оно $(1-y)^2\geq 0$), или $y^2-2x^2+1=1-2y+y^2$, или $y=x^2$ (причем $y\leq 1$). Поэтому построим параболу $y=x^2$ и выберем ту ее часть, для которой $y\leq 1$ (сплошная линия).



Ответ: см. график.

V. Подведение итогов урока

Глава III
КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 8. КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ

Уроки 43, 44. Определение квадратного уравнения. Неполные квадратные уравнения

Цели: дать определение квадратного уравнения и рассмотреть решение наиболее простых уравнений – неполных квадратных уравнений.

Планируемые результаты: научиться решать неполные квадратные уравнения.

Тип уроков: уроки изучения нового материала.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Работа по теме уроков

План уроков

1. Определение квадратного уравнения.
2. Неполные квадратные уравнения.

1. Определение квадратного уравнения

В 7 и 8 классах мы уже рассматривали (и даже решали) квадратные уравнения. Например: а) $x^2 - 4 = 0$; б) $3x^2 + 2x = 0$; в) $x^2 - 6x + 8 = 0$.

– Что общего в этих уравнениях? (*Члены, содержащие квадрат неизвестной.*)

Также в 7 классе изучались линейные уравнения, например: а) $x + 3 = 0$; б) $2x = 0$; в) $5x + 7 = 0$.

– Чем эти уравнения отличаются от квадратных? (*Содержат неизвестную только в первой степени.*)
– Вспомните общий вид линейного уравнения ($ax + b = 0$) и напишите по аналогии в общем виде квадратное уравнение ($ax^2 + bx + c = 0$).

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ называется *квадратным*. Здесь x – переменная (неизвестная); a, b и c – некоторые числа (коэффициенты), причем $a \neq 0$. При этом число a называют *первым коэффициентом* (иногда и *старшим коэффициентом*), b – *вторым коэффициентом* и c – *свободным членом*. Заметим, что квадратное уравнение называют еще *уравнением второй степени*, так как его левая часть является многочленом второй степени.

Пример 1

Обсудим уравнение $(a - 1)x + 2ax + 3a + 2 = 0$.

Если старший коэффициент $a - 1 \neq 0$ (т. е. $a \neq 1$), то данное уравнение является квадратным. Если $a = 1$, то при подстановке этого значения в данное уравнение получаем уравнение $2x + 5 = 0$, которое является линейным.

Пример 2

Приведем уравнение $(3x + 5)^2 = (2x - 1)(2x + 1)$ к виду $ax^2 + bx + c = 0$.

Используем формулы сокращенного умножения и получим: $9x^2 + 30x + 25 = 4x^2 - 1$. Перенесем все члены уравнения в левую часть: $9x^2 + 30x + 25 - 4x^2 + 1 = 0$ – и приведем подобные члены: $5x^2 + 30x + 26 = 0$. Получили квадратное уравнение, коэффициенты которого равны: $a = 5$, $b = 30$ и $c = 26$.

2. Неполные квадратные уравнения

Рассмотрим квадратные уравнения:

а) $3x^2 + 5x + 7 = 0$;

б) $2x^2 - 6 = 0$;

в) $3x^2 + 5x = 0$.

– Чем эти уравнения различаются? (*В уравнениях* ***б*** *и* ***в*** *отсутствует один из членов.*)

– Как вы решили бы уравнения *б* и *в*? (*Разложением на множители.*)

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b и c равен нулю, то такое уравнение называют *неполным квадратным уравнением*. В случае *б* коэффициент $b = 0$, в случае *в* коэффициент $c = 0$.

В соответствии с определением неполные квадратные уравнения бывают трех видов:

1) $ax^2 + c = 0$ (где $c \neq 0$);

2) $ax^2 + bx = 0$ (где $b \neq 0$);

3) $ax^2 = 0$.

Пример 3

При каком значении параметра a уравнение $3x^2 + (2a + 4)x + a - 3 = 0$ является неполным квадратным уравнением?

Так как старший коэффициент данного уравнения равен 3, то оно всегда является квадратным. Такое уравнение будет неполным, если его второй коэффициент или свободный член равны нулю.

Если второй коэффициент равен нулю (т. е. $2a + 4 = 0$, откуда $a = -2$), то уравнение принимает вид $3x^2 - 5 = 0$ и является неполным квадратным уравнением.

Если свободный член равен нулю (т. е. $a - 3 = 0$, откуда $a = 3$), то уравнение имеет вид $3x^2 + 10x = 0$ и также является неполным квадратным уравнением.

Обсудим решение неполных квадратных уравнений. Основной прием решения таких уравнений – разложение левой части уравнения на множители. В результате решение квадратного уравнения сводится к решению линейного уравнения.

Пример 4

Решим уравнение $-5x^2 + 15 = 0$.

Разделим все члены уравнения на число -5 (не равное нулю) и получим равносильное уравнение $x^2 - 3 = 0$. Учтем, что $3 = \left(\sqrt{3}\right)$, и по формуле разности квадратов разложим левую часть уравнения на множители: $\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right) = 0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x + \sqrt{3} = 0$ (его корень $x_1 = -\sqrt{3}$) и $x - \sqrt{3} = 0$ (корень $x_2 = \sqrt{3}$). Таким образом, данное квадратное уравнение имеет два корня: $x_1 = -\sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{3}$.

Аналогично решают неполные квадратные уравнения вида $ax^2 + c = 0$ (при $c \neq 0$). Разделим все члены уравнения на число a (где $a \neq 0$): $x^2 + \dfrac{c}{a} = 0$ – и запишем уравнение в виде $x^2 - \left(-\dfrac{c}{a}\right) = 0$.

Так как $c \neq 0$, то $-\dfrac{c}{a} \neq 0$.

Если $-\dfrac{c}{a} > 0$, то представим это число в виде $-\dfrac{c}{a} = \left(\sqrt{-\dfrac{c}{a}}\right)^2$ и разложим левую часть уравнения на множители по формуле разности квадратов: $x^2 - \left(\sqrt{-\dfrac{c}{a}}\right)^2 = 0$, или $\left(x + \sqrt{-\dfrac{c}{a}}\right)\left(x - \sqrt{-\dfrac{c}{a}}\right) = 0$.

Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x + \sqrt{-\dfrac{c}{a}} = 0$ (его корень $x_1 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$) и $x - \sqrt{-\dfrac{c}{a}} = 0$ (его корень $x_2 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$). Итак, при

$-\dfrac{c}{a} > 0$ уравнение $ax^2 + c = 0$ имеет два противоположных по знаку корня: $x_1 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ и $x_2 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

Случай $-\dfrac{c}{a} = 0$ не рассматривается, так как $c \neq 0$.

Если $-\dfrac{c}{a} < 0$, то в уравнении $x^2 - \left(-\dfrac{c}{a}\right) = 0$ первый член $x^2 \geq 0$ при любом значении x, второй член $-\left(-\dfrac{c}{a}\right) > 0$. Поэтому выражение $x^2 - \left(-\dfrac{c}{a}\right) > 0$ при любом значении x. Следовательно, в этом случае уравнение $x^2 - \left(-\dfrac{c}{a}\right) = 0$ (а также исходное уравнение $ax^2 + c = 0$) не имеет корней.

Теперь рассмотрим неполное квадратное уравнение второго вида.

Пример 5

Решим уравнение $3x^2 + 4x = 0$.

В левой части уравнения вынесем общий множитель x за скобки и разложим ее на множители: $x(3x + 4) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x = 0$ (его корень $x_1 = 0$) и $3x + 4 = 0$ (корень $x_2 = -\dfrac{4}{3} = -1\dfrac{1}{3}$). Итак, данное неполное квадратное уравнение имеет два корня $x_1 = 0$ и $x_2 = -1\dfrac{1}{3}$.

Аналогично решают неполные квадратные уравнения вида $ax^2 + bx = 0$. Разложим левую часть уравнения на множители: $x(ax + b) = 0$. Произведение двух множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x = 0$ (его корень $x_1 = 0$) и $ax + b = 0$ (его корень $x_2 = -\dfrac{b}{a}$). Итак, неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ (при $b \neq 0$) имеет два различных корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

Наконец, рассмотрим неполное квадратное уравнение третьего вида: $ax^2 = 0$.

Пример 6

Решим уравнение $-7x^2 = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители: $-7 \cdot x \cdot x = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Очевидно, что число $-7 \neq 0$. Поэтому получаем два одинаковых линейных уравнения $x = 0$ (их корень $x = 0$). Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень (часто говорят: два одинаковых корня) $x = 0$.

Аналогично решают неполные квадратные уравнения вида $ax^2 = 0$. Разложим его левую часть на множители: $a \cdot x \cdot x = 0$. Так как $a \neq 0$, то имеем два одинаковых линейных уравнения $x = 0$ (их корень $x = 0$). Итак, неполное квадратное уравнение вида $ax^2 = 0$ имеет единственный корень (или два одинаковых корня) $x = 0$.

Решения неполных квадратных уравнений приведены в таблице.

Вид неполного квадратного уравнения	**Корни уравнения**
$ax^2 + c = 0$ (где $c \neq 0$)	При $-\frac{c}{a} > 0$ $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$
	При $-\frac{c}{a} < 0$ корней нет
$ax^2 + bx = 0$ (где $b \neq 0$)	$x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$
$ax^2 = 0$	$x = 0$

III. Задания на уроках

№ 512 (б, в, е, устно); 513 (а, г, д, устно); 515 (а, в); 517 (в, г); 520; 521 (а, г); 522 (а, б); 523 (б, г); 525; 527.

IV. Контрольные вопросы

1. Напишите общий вид квадратного уравнения. Приведите примеры квадратных уравнений.
2. Какое квадратное уравнение называется неполным? Приведите примеры неполных квадратных уравнений.
3. Перечислите три вида неполных квадратных уравнений. Какие корни имеют эти уравнения?

V. Творческие задания

1. При каких значениях a уравнение является квадратным? Напишите это уравнение.

а) $(a - 1)x^3 + 3ax^2 + 2x - 5a = 0$;

б) $(2a - 4)x^3 - (a - 2)x^2 + ax - 3 = 0$;

в) $(2a + 4)x^3 - 2ax^2 + ax - 7 = 0$;

г) $(3a + 6)x^3 + (a + 2)x^2 + 2x + a = 0$.

Ответы: а) при $a = 1$ $3x^2 + 2x + 5 = 0$; б) ни при каких a; в) при $a = -2$ $4x^2 - 2x - 7 = 0$; г) ни при каких a.

2. При каких значениях a уравнение является квадратным? При каких значениях a уравнение будет линейным? Напишите это уравнение и решите его.

а) $(a-2)x^2+2ax-5=0$;

б) $(a-1)(a+2)x^2+ax-3a+1=0$;

в) $(2a+2)x^2-3ax+a-2=0$;

г) $(a^2-9)x^2+2ax+2a-5=0$.

Ответы: а) при $a \neq 1$ квадратное, при $a=2$ линейное $4x-5=0$ (корень $x=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$);

б) при $a \neq 1$ и $a \neq -2$ квадратное, при $a=1$ линейное $x-2=0$ (корень $x=2$), при $a=-2$ линейное $-2x+7=0$ (корень $x=3{,}5$);

в) при $a \neq -1$ квадратное, при $a=-1$ линейное $3x-3=0$ (корень $x=1$);

г) при $a \neq \pm 3$ квадратное, при $a=3$ линейное $6x+1=0$ (корень $x=-\frac{1}{6}$), при $a=-3$ линейное $-6x-11=0$ (корень $x=-\frac{11}{6}=-1\frac{5}{6}$).

3. При каких значениях a уравнение является неполным квадратным? Напишите это уравнение и решите его.

а) $2x^2-(a-3)x-5a=0$;

б) $3x^2-(2a+4)x+2a=0$;

в) $(a-1)x^2+(a+2)x-3a=0$;

г) $(3a+6)x^2+(a-1)x+2a-6=0$.

Ответы: а) при $a=3$ $2x^2-15=0$ (корни $x_1=-\sqrt{7{,}5}$ и $x_2=\sqrt{7{,}5}$), при $a=0$ $2x^2+3x=0$ (корни $x_1=0$ и $x_2=-1{,}5$);

б) при $a=-2$ $3x^2-4=0$ (корни $x_1=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $x_2=\frac{2}{\sqrt{3}}$), при $a=0$ $3x^2-4x=0$ (корни $x_1=0$ и $x_2=1\frac{1}{3}$);

в) при $a=-2$ $-3x^2+6=0$ (корни $x_1=-\sqrt{2}$ и $x_2=\sqrt{2}$), при $a=0$ $-x^2+2x=0$ (корни $x_1=0$ и $x_2=2$);

г) при $a=1$ $9x^2-4=0$ (корни $x_1=-\frac{2}{3}$ и $x_2=\frac{2}{3}$), при $a=3$ $15x^2+2x=0$ (корни $x_1=0$ и $x_2=-\frac{2}{15}$).

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 512 (а, г, д, устно); 513 (б, в, е, устно); 515 (б, г); 517 (а, б); 519; 521 (б, в); 522 (в, г); 523 (а, в); 524; 526.

Урок 45. Решение квадратных уравнений выделением квадрата двучлена

Цель: использовать способ выделения квадрата двучлена для решения полных квадратных уравнений.

Планируемые результаты: научиться приводить квадратные уравнения к неполным квадратным уравнениям и решать их.

Тип урока: урок проблемного изложения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Среди перечисленных уравнений найдите: а) квадратные уравнения, б) неполные квадратные уравнения, в) линейные уравнения:

а) $3x^2 - 5x + 7 = 0$; г) $-2x + 14 = 0$;
б) $2x^2 - 21x + 7 = 0$; д) $-3x^2 + 14 = 0$;
в) $6x^2 - 2x = 0$; е) $4x + 7 = 0$.

2. Какие корни имеет уравнение $ax^2 + c = 0$?

3. Решите квадратные уравнения:

а) $(2x - 1)(3x + 2) = 0$; в) $3x^2 - 6 = 0$;
б) $2x^2 - 3x = 0$; г) $-5x^2 = 0$.

Вариант 2

1. Среди перечисленных уравнений укажите: а) квадратные уравнения, б) неполные квадратные уравнения; в) линейные уравнения:

а) $-7x + 5 = 0$; г) $3x^2 + 5x = 0$;
б) $-2x^2 + 3x + 1 = 0$; д) $-2x^2 - 13 = 0$;
в) $4x^3 - 13x^2 = 0$; е) $3x - 11 = 0$.

2. Какие корни имеет уравнение $ax^2 + bx = 0$?

3. Решите квадратные уравнения:

а) $(5x - 2)(3x + 1) = 0$; в) $3x^2 + 5x = 0$;
б) $2x^2 - 10 = 0$; г) $-4x^2 = 0$.

III. Работа по теме урока

Рассмотрим примеры решения полных квадратных уравнений (т. е. таких уравнений, в которых все три коэффициента отличны от нуля), способом выделения квадрата двучлена.

Покажем, что такие уравнения можно привести к неполным квадратным уравнениям. Начнем рассмотрение с уравнений, в которых старший коэффициент равен 1. Такие уравнения называют *приведенными уравнениями.*

Пример 1

Решим приведенное квадратное уравнение $x^2 - 8x + 16 = 0$.

Представим левую часть уравнения в виде квадрата двучлена и получим: $x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = 0$ или $(x - 4)^2 = 0$. Введем новую переменную $z = x - 4$ и получим неполное квадратное уравнение $z^2 = 0$. Такое уравнение имеет единственный корень (или два одинаковых корня) $z = 0$. Вернемся к старой неизвестной x и получим линейное уравнение $x - 4 = 0$, которое имеет корень $x = 4$.

Пример 2

Решим еще одно приведенное квадратное уравнение $x^2 + 6x + 8 = 0$.

В отличие от предыдущего примера левая часть уравнения не является квадратом двучлена. Поэтому такой квадрат двучлена необходимо выделить. Представим второй член уравнения $6x$ в виде $6x = 2 \cdot x \cdot 3$. Тогда для выделения квадрата двучлена к левой части уравнения необходимо прибавить (и отнять) число $3^2 = 9$. Получаем $(x^2 + 6x + 9) - 9 + 8 = 0$, или $(x + 3)^2 - 1 = 0$. Введем новую переменную $z = x + 3$ и получим неполное квадратное уравнение $z^2 - 1 = 0$, или $z^2 = 1$, которое имеет два противоположных по знаку корня: $z_1 = -1$ и $z_2 = 1$. Вернемся к старой неизвестной x и получим два линейных уравнения: $x + 3 = -1$ (его корень $x_1 = -4$) и $x + 3 = 1$ (корень $x_2 = -2$).

Разумеется, квадратное уравнение может иметь не только целые корни (как в примерах 1, 2), но и иррациональные решения.

Пример 3

Решим уравнение $x^2 - 4x - 3 = 0$.

Вновь выделим в левой части уравнения квадрат двучлена: $(x^2 - 4x + 4) - 4 - 3 = 0$, или $(x - 2)^2 - 7 = 0$. Введем новую переменную $z = x - 2$ и получим неполное квадратное уравнение $z^2 - 7 = 0$, или $z^2 = 7$, которое имеет два противоположных по знаку корня: $z_1 = -\sqrt{7}$ и $z_2 = \sqrt{7}$. Вернемся к старой неизвестной x и получим два линейных уравнения: $x - 2 = -\sqrt{7}$ (его корень $x_1 = 2 - \sqrt{7}$) и $x - 2 = \sqrt{7}$ (его корень $x_2 = 2 + \sqrt{7}$).

Может оказаться, что квадратное уравнение не имеет корней.

Пример 4

Решим уравнение $x^2 - 6x + 11 = 0$.

Выделим в левой части уравнения квадрат двучлена: $(x^2 - 6x + 9) - 9 + 11 = 0$, или $(x - 3)^2 + 2 = 0$. Введем новую переменную

$z = x - 3$ и получим неполное квадратное уравнение $z^2 + 2 = 0$, или $z^2 = -2$, которое не имеет решений. Следовательно, и данное квадратное уравнение корней не имеет.

До сих пор рассматривалось решение только приведенных квадратных уравнений. Разумеется, любое уравнение можно свести к приведенному, разделив все его члены на старший коэффициент. Затем вновь используется выделение квадрата двучлена.

Пример 5

Решим уравнение $3x^2 - 10x - 8 = 0$.

Разделим обе части уравнения на старший коэффициент 3 и получим приведенное квадратное уравнение $x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{8}{3} = 0$. Выделим квадрат двучлена: $\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{3} + \frac{25}{9}\right) - \frac{25}{9} - \frac{8}{3} = 0$, или $\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{49}{9} = 0$. Введем новую переменную $z = x - \frac{5}{3}$ и получим неполное квадратное уравнение $z^2 - \frac{49}{9} = 0$, или $z^2 = \frac{49}{9}$, которое имеет два корня: $z_1 = -\frac{7}{3}$ и $z_2 = \frac{7}{3}$. Вернемся к старой неизвестной x и получим два линейных уравнения: $x - \frac{5}{3} = -\frac{7}{3}$ (его корень $x_1 = -\frac{2}{3}$) и $x - \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$ (его корень $x_2 = 4$).

IV. Контрольные вопросы

1. Каким способом решают квадратные уравнения?
2. Какое квадратное уравнение называют приведенным?
3. Как выделить квадрат разности? Поясните на примере.

V. Подведение итогов урока

Уроки 46, 47. Формула корней квадратного уравнения

Цели: вывести формулу корней квадратного уравнения и научить использовать ее для решения квадратных уравнений.

Планируемые результаты: научиться применять формулу для нахождения корней квадратного уравнения.

Тип уроков: урок общеметодологической направленности, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Способом выделения квадрата двучлена решите уравнение:

1) $x^2 + 10x + 25 = 0$;
2) $x^2 - 4x - 12 = 0$;
3) $x^2 - 6x + 7 = 0$;
4) $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

Вариант 2

Способом выделения квадрата двучлена решите уравнение:

1) $x^2 + 12x + 36 = 0$;
2) $x^2 + 6x + 5 = 0$;
3) $x^2 + 4x - 1 = 0$;
4) $3x^2 - 5x - 8 = 0$.

III. Работа по теме уроков

План уроков

1. Формула корней квадратного уравнения.
2. Формула корней с четным вторым коэффициентом уравнения.
3. Примеры решения уравнений.

1. Формула корней квадратного уравнения

На предыдущем уроке при решении квадратных уравнений нам приходилось выделять квадрат двучлена. Чтобы постоянно не выполнять такие преобразования, достаточно один раз выполнить эти преобразования для общего вида квадратного уравнения и получить формулу корней квадратного уравнения. Далее эту формулу можно применять при решении любого квадратного уравнения.

Решим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Разделим все члены уравнения на старший коэффициент a (напомним, что $a \neq 0$) и получим равносильное приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. В левой части уравнения выделим квадрат двучлена: $\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$, или $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$. Введем новую переменную $z = x + \frac{b}{2a}$ и получим неполное квадратное уравнение $z^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$, или $z^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$, или $z^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Так как $a \neq 0$, то $4a^2$ – положительное число.

Поэтому знак дроби $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ определяется знаком ее числителя $b^2 - 4ac$. Это выражение называют *дискриминантом* квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ («дискриминант» по-латыни означает «различитель», «определитель»). Его обозначают буквой D, т. е. $D^2 = b^2 - 4ac$.

Тогда уравнение имеет вид $z^2 = \frac{D}{4a^2}$. Рассмотрим теперь различные возможные случаи решения в зависимости от D.

1. Если $D > 0$, то уравнение имеет два противоположных по знаку корня: $z_1 = -\frac{\sqrt{D}}{2a}$ и $z_2 = \frac{\sqrt{D}}{2a}$. Вернемся к старой неизвестной x и получим два линейных уравнения: $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a}$ (откуда корень $x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$) и $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}$ (тогда корень $x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$).

Итак, при $D > 0$ квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Принята следующая краткая запись корней: $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$ (1), которую называют ***формулой корней квадратного уравнения***.

2. Если $D = 0$, то уравнение $z^2 = \frac{D}{4a^2}$ имеет вид $z^2 = 0$. Это уравнение имеет единственный корень (или два одинаковых корня) $z = 0$. Вернемся к старой неизвестной x и получим линейное уравнение $x + \frac{b}{2a} = 0$, корень которого $x = -\frac{b}{2a}$.

Итак, при $D = 0$ квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственный корень (или два одинаковых корня) $x = -\frac{b}{2a}$.

При $D = 0$ также можно пользоваться формулой (1). Действительно, при $D = 0$ получаем $x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$, или $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Если $D < 0$, то уравнение $z^2 = \frac{D}{4a^2}$ не имеет корней, так как дробь $\frac{D}{4a^2} < 0$. Следовательно, при $D < 0$ квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней.

Таким образом, в зависимости от дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ может иметь два различных корня при $D > 0$, единственный корень (или два одинаковых корня) при $D = 0$ и не иметь корней при $D < 0$, что отражено в таблице.

Дискриминант $D = b^2 - 4ac$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$	Два различных корня: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	Два равных корня (или один корень): $x_{1,2} = -\dfrac{b}{2a}$	Нет корней

Итак, при решении квадратного уравнения поступают следующим образом:

1. Вычисляют дискриминант квадратного уравнения.
2. Сравнивают дискриминант с нулем.
3. Если дискриминант $D \geq 0$, то используют формулу корней (или данные приведенной таблицы), если дискриминант $D < 0$, то записывают, что корней нет.

Пример 1

Решим уравнение $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

В данном уравнении коэффициенты $a = 3$, $b = -5$, $c = -2$. Найдем дискриминант: $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49$, $D > 0$. Поэтому уравнение имеет два различных корня. Используем формулу корней квадратного уравнения $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ и получим $x_{1,2} = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 3} = \dfrac{5 \pm 7}{6}$, т. е. $x_1 = \dfrac{5+7}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$ и $x_2 = \dfrac{5-7}{6} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $x_1 = 2$ и $x_2 = -\dfrac{1}{3}$.

Пример 2

Решим уравнение $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

В данном уравнении коэффициенты $a = 4$, $b = -12$, $c = 9$. Найдем дискриминант: $D = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$. Поэтому уравнение имеет два равных корня (или один корень): $x = \dfrac{-b \pm D}{2a} = \dfrac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

Ответ: $x = 1{,}5$.

Пример 3

Решим уравнение $2x^2 + 7x + 8 = 0$.

В данном уравнении коэффициенты $a = 2$, $b = 7$, $c = 8$. Найдем дискриминант $D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 49 - 64 = -15$. Так как дискриминант $D < 0$, то данное уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет.

2. Формула корней с четным вторым коэффициентом уравнения

Для квадратных уравнений, у которых второй коэффициент является четным числом, формулу корней можно записать в более удобном виде. Пусть квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет четный второй коэффициент, т. е. $b = 2k$ (т. е. уравнение имеет вид $ax^2 + 2kx + c = 0$). Найдем его дискриминант $D = b^2 - 4ac = (2k)^2 - 4ac = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$. Очевидно, что число корней уравнения зависит от знака выражения $k^2 - ac$. Обозначим это выражение D_1 (т. е. $D_1 = k^2 - ac$), тогда $D = 4D_1$.

Если $D_1 \geq 0$ (тогда и $D \geq 0$), то по формуле корней квадратного уравнения получим

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

т. е. $x = \dfrac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$, где $D_1 = k^2 - ac$ (2).

Если $D_1 < 0$ (тогда и $D < 0$), то уравнение корней не имеет.

Пример 4

Решим уравнение $3x^2 - 4x + 1 = 0$.

В данном уравнении коэффициенты $a = 3$, $b = -4$, $c = 1$. Так как второй коэффициент четный (т. е. $b = 2k$, где $k = -2$), то найдем величину $D_1 = k^2 - ac = (-2)^2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1$ и используем формулу корней (2). Получаем $x = \dfrac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{1}}{3} = \dfrac{2 \pm 1}{3}$,

т. е. $x_1 = \dfrac{2+1}{3} = 1$ и $x_2 = \dfrac{2-1}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: $x_1 = 1$ и $x_2 = \dfrac{1}{3}$.

3. Примеры решения уравнений

Очень часто встречаются квадратные *уравнения с параметрами*.

Пример 5

Докажите, что при любом значении параметра a уравнение $3x^2 - 5ax - a^2 - 1 = 0$ имеет два различных корня.

Так как старший коэффициент данного уравнения не равен нулю, то это уравнение является квадратным. Найдем его дискриминант $D = (-5a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-a^2 - 1) = 25a^2 + 12a^2 + 12 = 37a^2 + 12$. Так как при всех значениях a выражение $a^2 \geq 0$, то дискриминант $D > 0$. Следовательно, данное квадратное уравнение имеет два различных корня.

Пример 6

При всех значениях параметра a решим уравнение $ax^2 + (3a - 2)x - 6 = 0$.

Если старший коэффициент a данного уравнения равен 0, то это уравнение не является квадратным. Подставим значение $a = 0$ в уравнение и получим линейное уравнение $-2x - 6 = 0$, которое имеет единственный корень $x = -3$.

Если старший коэффициент $a \neq 0$, то данное уравнение является квадратным. Найдем его дискриминант $D = (3a - 2)^2 - 4 \cdot a \cdot (-6) = 9a^2 - 12a + 4 + 24a = 9a^2 + 12a + 4 = (3a + 2)^2$ и корни $x = \dfrac{-(3a-2)^2 \pm \sqrt{(3a+2)^2}}{2a} = \dfrac{-3a + 2 \pm (3a+2)}{2a}$, т. е. $x_1 = \dfrac{-3a + 2 + 3a + 2}{2a} = \dfrac{4}{2a} = \dfrac{2}{a}$ и $x_2 = \dfrac{-3a + 2 - 3a - 2}{2a} = \dfrac{-6a}{2a} = -3$.

Так как в задачах с параметрами очень важен грамотный ответ, то выпишем его: при $a \neq 0$ $x_1 = \dfrac{2}{a}$ и $x_2 = -3$, при $a = 0$ $x = -3$.

Пример 7

Один из корней квадратного уравнения $x^2 + 2ax + 2 - 3a = 0$ равен 1. Найдите значение параметра a и второй корень уравнения.

Так как один корень $x_1 = 1$ известен, то подставим его в уравнение и получим верное равенство: $1^2 + 2a \cdot 1 + 2 - 3a = 0$, или $3 - a = 0$, откуда $a = 3$. Подставим это значение параметра a в данное уравнение и получим $x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x^2 + 2 - 3 \cdot 3 = 0$, или $x^2 + 6x - 7 = 0$. Решая это квадратное уравнение, найдем корни: $x_1 = 1$ (этот корень был известен) и $x_2 = -7$. Итак, $a = 3$, $x_2 = -7$.

Также часто встречаются квадратные *уравнения*, *содержащие модули*.

Пример 8

Решим уравнение $|x^2 - 3x + 4| = |2x - 2|$.

Используем свойства модуля: если модули двух выражений равны, то сами выражения или равны, или противоположны по знаку. Рассмотрим эти случаи.

1. $x^2 - 3x + 4 = 2x - 2$, или $x^2 - 5x + 6 = 0$. Это уравнение имеет два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

2. $x^2 - 3x + 4 = -(2x - 2)$, или $x^2 - 3x + 4 = -2x + 2$, или $x^2 - x + 2 = 0$. Дискриминант этого уравнения отрицательный, и оно не имеет корней.

Итак, данное уравнение имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

Пример 9

Решим уравнение $x|x| - 7x + 10 = 0$.

Используем определение модуля и рассмотрим два случая.

1. Если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и уравнение имеет вид $x^2 - 7x + 10 = 0$. Его корни $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$ удовлетворяют условию $x \geq 0$ и являются корнями данного уравнения.

2. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и уравнение имеет вид $-x^2 - 7x + 10 = 0$, или $x^2 + 7x - 10 = 0$. Найдем его корни:

$$x_{3,4} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 40}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{89}}{2}.$$

Условию $x < 0$ удовлетворяет только корень $x_3 = \dfrac{-7 - \sqrt{89}}{2}$.

Итак, данное уравнение имеет три корня: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ и $x_3 = \dfrac{-7 - \sqrt{89}}{2}$.

IV. Задания на уроках

№ 533 (а, в, устно); 534 (а, б); 537 (а, б); 538 (а); 539 (а, в); 542 (а); 544 (а); 546 (в); 547 (в); 552 (а); 553 (б); 554.

V. Контрольные вопросы

1. Напишите формулу корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Выведите эту формулу.
3. Напишите формулу корней квадратного уравнения $ax^2 + 2kx + c = 0$.
4. Выведите эту формулу.
5. Получите формулу корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

VI. Творческие задания

1. Докажите, что при всех значениях параметра a квадратное уравнение имеет два различных корня:

а) $3x^2 - 4ax - 2 = 0$;
б) $2x^2 + 5ax - 3 = 0$;
в) $2x^2 + 3ax - a^2 - 1 = 0$;
г) $4x^2 - 5ax - 2a^2 - 3 = 0$.

(Указание: найдите дискриминант уравнения и сравните его с нулем.)

2. Решите уравнение при всех значениях параметра a:

а) $x^2 - 5ax + 6a^2 = 0$;
б) $x^2 + ax - 2a^2 = 0$;
в) $6x^2 + ax - a^2 = 0$;
г) $8x^2 - 2ax - a^2 = 0$;
д) $x^2 + (a - 1)x - a = 0$;
е) $x^2 - (2a + 3)x + 6a = 0$;

ж) $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$;
з) $x^2 - 4ax + 4a^2 - 9 = 0$;
и) $x^2 + (a + 1)x - 2a^2 + 2a = 0$;
к) $x^2 + 2(a + 2)x + 12a - 3a^2 = 0$;
л) $ax^2 - (a + 1)x + 1 = 0$;
м) $(a + 1)x^2 - 2x + 1 - a = 0$.

Ответы: а) $x_1 = 2a$, $x_2 = 3a$; б) $x_1 = -2a$, $x_2 = a$; в) $x_1 = -\frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{a}{3}$; г) $x_1 = -\frac{a}{4}$, $x_2 = \frac{a}{2}$; д) $x_1 = -a$, $x_2 = 1$; е) $x_1 = 2a$, $x_2 = 3$; ж) $x_1 = a - 1$, $x_2 = a + 1$; з) $x_1 = 2a - 3$, $x_2 = 2a + 3$; и) $x_1 = -2a$, $x_2 = a - 1$; к) $x_1 = -3a$, $x_2 = a - 4$; л) при $a \neq 0$ $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{1}{a}$, при $a = 0$ $x = 1$; м) при $a \neq -1$ $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{1-a}{1+a}$, при $a = -1$ $x = 1$.

(Указание: используйте формулу корней квадратного уравнения.)

3. Один из корней квадратного уравнения равен x_1. Найдите второй корень уравнения и значение параметра a:

а) $x^2 - ax + 6 = 0$, $x_1 = 2$;
б) $x^2 + ax - 3 = 0$, $x_1 = 3$;
в) $ax^2 + 2(2 - a)x - 1 = 0$, $x_1 = 1$;
г) $ax^2 + 3x - a = 0$, $x_1 = -2$.

Ответы: а) $a = 5$, $x_2 = 3$; б) $a = -2$, $x_2 = -1$; в) $a = 3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$; г) $a = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

(Указание: подставьте корень x_1 в уравнение и определите значение параметра a, потом решите уравнение и найдите корень x_2.)

4. Решите уравнение:

а) $x^2 + 6|x| - 7 = 0$;
б) $x^2 - |x| - 6 = 0$;
в) $|x^2 - 5x + 4| = 4$;
г) $|x^2 + 3x + 2| = 2$;
д) $|x^2 + x - 3| = x$;
е) $|x^2 - x - 8| = -x$;
ж) $|x^2 + 4x + 3| = |x + 1|$;
з) $|x^2 - 4x + 10| = |x + 4|$;
и) $x|x| - 7x + 12 = 0$;
к) $x|x| - 4x + 3 = 0$.

Ответы: а) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; б) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$; в) $x_1 = 0$, $x_2 = 5$; г) $x_1 = 0$, $x_2 = -3$; д) $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{3}$; е) $x_1 = -2\sqrt{2}$, $x^2 = -2$; ж) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -4$; з) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; и) $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = \frac{-7 - \sqrt{97}}{-2}$; к) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2 - \sqrt{7}$.

(Указание: используйте определение и свойства модуля.)

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 533 (б, г, устно); 534 (в); 536 (а, в); 537 (в, г); 538 (б); 539 (б, г); 542 (д); 544 (б); 546 (а, б); 547 (г); 549 (а); 552 (б); 553 (а); 555.

Уроки 48–50. Решение задач с помощью квадратных уравнений

Цель: применить квадратные уравнения для решения алгебраических и геометрических задач.

Планируемые результаты: научиться решать текстовые задачи по теме.

Тип уроков: уроки-исследования, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Напишите формулу корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

2. Решите уравнение:

а) $9x^2 + 24x + 16 = 0$;
б) $3x^2 - 8x + 7 = 0$;
в) $3x^2 + 16x - 12 = 0$;
г) $x^2 - x + a - a^2 = 0$;
д) $|x^2 + 7x + 8| = 8$.

Вариант 2

1. Напишите формулу корней квадратного уравнения $ax^2 + 2kx + c = 0$.

2. Решите уравнение:

а) $16x^2 + 24x + 9 = 0$;
б) $2x^2 + 7x - 4 = 0$;
в) $4x^2 + 11x + 9 = 0$;
г) $x^2 - x - 4a^2 - 2a = 0$;
д) $|x^2 + 5x + 6| = 6$.

III. Работа по теме уроков

Многие задачи в курсах алгебры, геометрии, физики и т. д. необходимо решать с помощью квадратных уравнений.

Пример 1

Произведение двух натуральных чисел, одно из которых на 5 больше другого, равно 104. Найдите эти числа.

Пусть меньшее из данных чисел равно x, тогда большее число равно $x + 5$. По условию произведение этих чисел равно 104. Поэтому получаем уравнение $x(x + 5) = 104$, или $x^2 + 5x - 104 = 0$. Решим это квадратное уравнение. Найдем его дискриминант: $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-104) = 441 = 21^2$ – и корни: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm 21}{2}$, т. е. $x_1 = \frac{-5+21}{2} = 8$ и $x_2 = \frac{-5-21}{2} = -13$. Второй корень по смыслу задачи не подходит, так как даны натуральные числа. Итак, меньшее число равно 8, тогда большее число равно $8 + 5 = 13$.

Ответ: 8 и 13.

Пример 2

В прямоугольном треугольнике один катет больше другого на 7 см, а гипотенуза больше меньшего катета на 8 см. Найдите стороны треугольника.

Пусть длина меньшего катета составляет x (см), тогда длина большего катета равна $x + 7$ (см), длина гипотенузы равна $x + 8$ (см). По теореме Пифагора квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Получаем уравнение $(x + 8)^2 = x^2 + (x + 7)^2$, или $x^2 + 16x + 64 = x^2 + x^2 + 14x + 49$, или $0 = x^2 - 2x - 15$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 5$ и $x_2 = -3$. По смыслу задачи x должен быть положительным числом. Поэтому подходит только первый корень $x = 5$. Тогда длина второго катета равна $5 + 7 = 12$ (см), длина гипотенузы $5 + 8 = 13$ (см).

Ответ: 5 см, 12 см, 13 см.

Пример 3

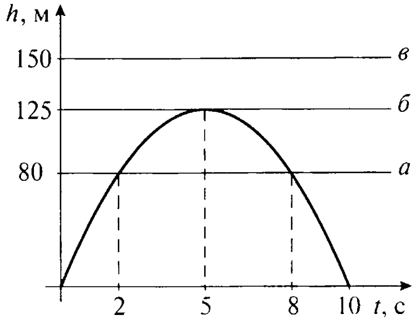
Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 50$ м/с. Через сколько секунд тело окажется на высоте h? Вычислите для случаев: а) $h = 80$ м; б) $h = 125$ м; в) $h = 150$ м.

Из физики известно, что высота h (м), на которой брошенное вертикально вверх тело окажется через t с, может быть найдена по формуле $h = v_0t - \frac{gt^2}{2}$. Здесь v_0 – начальная скорость (м/с); g – ускорение свободного падения, приближенно равное 10 м/с^2. Подставим значения v_0 и g в формулу и получим уравнение $h = 50t - 5t^2$, или $5t^2 - 50t + h = 0$. Найдем дискриминант этого квадратного уравнения с параметром h и получим $D_1 = (-25)^2 - 5 \cdot h = 625 - 5h$. Для данных значений h найдем корни уравнения.

а) Если $h = 80$ м, то $D_1 = 625 - 5 \cdot 80 = 225 = 15^2$ и $t_{1,2} = \frac{25 \pm 15}{5}$, т. е. $t_1 = 8$ с и $t_2 = 2$ с. В этом случае тело окажется на данной высоте дважды: при подъеме верх ($t = 2$ с) и при падении вниз ($t = 8$ с).

б) Если $h = 125$ м, то $D_1 = 625 - 5 \cdot 125 = 0$ и $t = \frac{25}{5} = 5$. В этом случае тело окажется на данной высоте однажды: через $t = 5$ с, и эта высота – наивысшая высота подъема тела.

в) Если $h = 150$ м, то $D_1 = 625 - 5 \cdot 150 = -125$. Так как D_1 отрицательный, то уравнение решений не имеет. Это означает, что кинетической энергии тела $\frac{mv_0^2}{2}$ (где m – масса тела) не хватает для его подъема на заданную высоту h.



Для наглядности на рисунке приведена зависимость h от t, т. е. $h = 50t - 5t^2$. Из графика видно, что тело в течение первых пяти секунд поднимается до высоты 125 м, а затем в течение следующих пяти секунд падает вниз. Через 10 с после броска тело падает на землю.

На высоте $h = 80$ м тело оказывается дважды: через 2 с (подъем) и 8 с (падение) от момента броска (случай а). На высоте $h = 125$ м тело оказывается однажды: через 5 с в наивысшей точке подъема (случай *б*). На высоте $h = 150$ м тело оказаться не может (случай *в*).

Из приведенного примера также видно, что в зависимости от значения параметра h квадратное уравнение $5t^2 - 50t + h = 0$ имеет различные решения. Этим решениям соответствует различная физическая ситуация.

IV. Задания на уроках

№ 559; 562; 563; 565; 568; 569; 571; 573.

V. Подведение итогов

Домашнее задание

№ 560; 561; 564; 566; 567; 570; 572; 574; 575.

Уроки 51, 52. Теорема Виета

Цели: доказать прямую и обратную теоремы Виета, использовать их при решении задач.

Планируемые результаты: отработать навыки применения теоремы Виета к решению задач.

Тип уроков: уроки проблемного изложения.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)

Вариант 1

1. Произведение двух последовательных натуральных нечетных чисел равно 575. Найдите эти числа.

2. Найдите стороны прямоугольника, если известно, что одна из них на 17 см больше другой, а диагональ прямоугольника равна 25 см.

Вариант 2

1. Произведение двух последовательных натуральных четных чисел равно 624. Найдите эти числа.

2. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если один из них на 7 см меньше другого, а гипотенуза равна 17 см.

III. Работа по теме уроков

План уроков

1. Теорема Виета.
2. Обратная теорема Виета.
3. Примеры решения задач по теме.

1. Теорема Виета

Сначала рассмотрим несколько приведенных квадратных уравнений. Найдем их корни, а также сумму и произведение этих корней.

$x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$, $x_1 + x_2 = 1$, $x_1x_2 = -2$;
$x^2 - 7x + 12 = 0$, $x_1 = 3$ и $x_2 = 4$, $x_1 + x_2 = 7$, $x_1x_2 = 12$;
$x^2 - 3x - 10 = 0$, $x_1 = -2$ и $x_2 = 5$, $x_1 + x_2 = 3$, $x_1x_2 = -10$.

Какие закономерности вы видите между суммой и произведением корней уравнения и его коэффициентами? Попробуйте их сформулировать.

Видно, что для каждого из приведенных уравнений сумма корней равна второму коэффициенту с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену. Такое утверждение называется *прямой теоремой Виета* и выполняется для любого приведенного квадратного уравнения, имеющего корни. Докажем эту теорему.

Рассмотрим приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ (где старший коэффициент равен 1, второй коэффициент обозначен буквой p, свободный член – буквой q). Найдем его дискриминант: $D = p^2 - 4q$. Пусть $D \geq 0$, тогда уравнение имеет два различных ($D > 0$) или равных ($D = 0$) корня: $x_1 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2}$ и $x_2 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2}$. Найдем сумму и произведение этих корней:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} + \frac{-p+\sqrt{D}}{2} = \frac{-p-\sqrt{D}-p+\sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p$$

и $$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p+\sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4} = \frac{p^2 - D}{4} =$$

$$= \frac{p^2 - \left(p^2 - 4q\right)}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Итак, доказано, что $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1x_2 = q$.

Заметим, что и ранее, и сейчас в случае, когда дискриминант квадратного уравнения равнялся нулю, мы говорили, что уравнение имеет два равных (или одинаковых) корня. Тогда теорема Виета выполняется. Если считать, что в этом случае уравнение имеет один корень, то непонятно, как использовать теорему Виета (что в этом случае считать корнем x_2).

Теорему Виета легко применить к произвольному квадратному уравнению $ax^2 + bx + c = 0$. Пусть это уравнение имеет корни x_1 и x_2. Разделим все части уравнения на старший коэффициент a и получим равносильное приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Для него (и для исходного уравнения) по доказанной теореме Виета выполняются соотношения: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

2. Обратная теорема Виета

Если числа m и n таковы, что их сумма равна числу $-p$, а произведение равно числу q, то числа m и n являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. Докажем это утверждение.

По условию $m + n = -p$, а $p = -(m + n)$ и $mn = q$. Подставим величины p и q в уравнение $x^2 + px + q = 0$ и получим уравнение

$x^2 - (m + n)x + mn = 0$. Докажем, что число m является корнем этого уравнения. Подставим вместо x число m и получим $m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - nm + mn = 0$ (верное равенство). Следовательно, число m является корнем уравнения $x^2 + px + q = 0$. Аналогично доказывается, что число n также является корнем этого уравнения.

3. Примеры решения задач по теме

Рассмотрим примеры применения прямой и обратной теорем Виета.

Пример 1

Пусть уравнение $3x^2 - 7x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2.

Найдем: а) сумму корней $x_1 + x_2$; б) произведение корней x_1x_2; в) сумму обратных величин корней $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; г) сумму квадратов корней $x_1^2 + x_2^2$; д) сумму кубов корней $x_1^3 + x_2^3$; е) модуль разности корней $|x_1 - x_2|$.

Найдем дискриминант данного уравнения: $D = (-7)^2 - 4 \times 3 \cdot 1 = 37$. Так как $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня. Так как дискриминант не является квадратом натурального числа, то корни уравнения x_1 и x_2 — иррациональные числа. Поэтому прямое и непосредственное выполнение заданий под пунктами *а—е* затруднительно. Следовательно, для вычислений используем прямую теорему Виета.

Разделим все члены данного уравнения на старший коэффициент 3 и получим равносильное уравнение $x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{1}{3} = 0$.

Тогда по теореме Виета сразу получаем

а) $x_1 + x_2 = -\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$;

б) $x_1x_x = \frac{1}{3}$.

Для выполнения заданий под остальными пунктами надо выразить требуемые комбинации корней через их сумму и произведение.

в) Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{7/3}{1/3} = 7.$$

г) Используем формулу квадрата суммы:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{49}{9} - \frac{2}{3} = \frac{43}{9} = 4\frac{7}{9}.$$

д) Применим формулу суммы кубов:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\cdot\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\right) = (x_1 + x_2)\left(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2\right).$$

Подставим в это выражение значения величин $x_1 + x_2$, $x_1^2 + x_2^2$ и x_1x_2. Получаем $x_1^3 + x_2^3 = \frac{7}{3}\cdot\left(\frac{43}{9} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3}\cdot\frac{40}{9} = \frac{280}{27} = 10\frac{10}{27}$.

е) Используем свойство арифметического корня и формулу квадрата разности:

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}.$$

Подставим в это выражение значения величин $x_1^2 + x_2^2$ и x_1x_2 и получим: $|x_1 - x_2| = \sqrt{\frac{43}{9} - 2\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{37}{9}} = \frac{\sqrt{37}}{3}$.

Пример 2

Решим уравнение $197x^2 - 2197x + 2000 = 0$.

Очевидно, что вычисление дискриминанта этого уравнения $D = (-2197)^2 - 4\cdot 197\cdot 2000$ достаточно трудоемко. Поэтому проще решить это уравнение подбором. Ясно, что один корень уравнения $x_1 = 1$. При подстановке этого значения в уравнение получаем $197\cdot 1^2 - 2197\cdot 1 + 2000 = 0$ (верное равенство).

По прямой теореме Виета имеем $x_1x_2 = \frac{2000}{197}$, откуда корень $x_2 = \frac{2000}{197x_1} = \frac{2000}{197\cdot 1} = \frac{2000}{197} = 10\frac{30}{197}$.

Используя обратную теорему Виета, проверим найденные корни. Сумма корней $x_1 + x_2 = 1 + \frac{2000}{197} = \frac{2197}{197}$, и произведение корней $x_1x_2 = \frac{2000}{197}$ (это соотношение мы уже использовали). Поэтому числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения

$$x^2 - \frac{2197}{197}x + \frac{2000}{197} = 0.$$

Умножим все члены на число 197 и получим равносильное уравнение $197x^2 - 2197x + 2000 = 0$. Таким образом, на основании обратной теоремы Виета мы показали, что числа $x_1 = 1$ и $x_2 = 10\frac{30}{197}$ являются корнями данного уравнения $197x^2 - 2197x + 2000 = 0$.

Пример 3

Напишем квадратное уравнение, корни которого $x_1 = -\frac{1}{3}$ и $x_2 = \frac{1}{5}$.

Найдем сумму и произведение данных корней:
$x_1 + x_2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = -\frac{2}{15}$ и $x_1x_2 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{1}{15}$.

Тогда по обратной теореме Виета числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 + \frac{2}{15}x - \frac{1}{15} = 0$. Умножим все члены на число 15 и получим равносильное уравнение $15x^2 + 5x - 1 = 0$, которое имеет заданные корни x_1 и x_2.

Пример 4

Не решая уравнения $7x^2 + 18x + 3 = 0$, определим знаки его корней.

Дискриминант этого уравнения: $D = 18^2 - 4 \cdot 7 \cdot 3 = 240$. Так как $D > 0$, то данное уравнение имеет два различных корня. Определим знаки этих корней. Используя прямую теорему Виета, имеем $x_1 + x_2 = -\frac{18}{7}$ и $x_1x_2 = \frac{3}{7}$. Так как $x_1x_2 > 0$, то числа x_1 и x_2 имеют одинаковые знаки (или оба положительные, или оба отрицательные). Так как при этом $x_1 + x_2 < 0$, то корни x_1 и x_2 отрицательные.

Разумеется, использование прямой и обратной теорем Виета позволяет решать и более сложные задачи.

Пример 5

Уравнение $7x^2 + 14x + 3 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Напишем уравнение, которое имеет корни $2x_1$ и $2x_2$.

Найдем дискриминант данного уравнения $D = 14^2 - 4 \cdot 7 \times \times 3 = 112$. Так как $D > 0$, то уравнение имеет различные корни x_1 и x_2. Сами корни x_1 и x_2 находить не будем, но найдем по прямой теореме Виета сумму и произведение этих корней: $x_1 + x_2 = -\frac{14}{7} = -2$ и $x_1x_2 = \frac{3}{7}$.

В уравнении, которое надо написать, будем обозначать неизвестную буквой y. По условию корни этого уравнения удовлетворяют соотношениям $y_1 = 2x_1$ и $y_2 = 2x_2$. Найдем сумму и произведение этих корней: $y_1 + y_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot (-2) = -4$ и $y_1y_2 = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1x_2 = 4 \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{7}$. Тогда по обратной теореме Виета числа y_1 и y_2 являются корнями уравнения $y^2 + 4y + \frac{12}{7} = 0$. Умножим все члены на число 7 и получим равносильное уравнение $7y^2 + 28y + 12 = 0$. Оно удовлетворяет условиям задачи.

Сравним данное уравнение $7x^2 + 14x + 3 = 0$ с корнями x_1 и x_2 и полученное уравнение $7y^2 + 28y + 12 = 0$ с корнями $2x_1$

и $2x_2$. Видно, что старшие коэффициенты в уравнениях одинаковы. Второй коэффициент полученного уравнения в 2 раза больше, чем у данного. Свободный член полученного уравнения в 4 ($2^2 = 4$) раза больше, чем у данного.

Пример 6

Решите уравнение $x^2 - 4x + a = 0$, если его корни x_1 и x_2 связаны равенством $2x_1 + x_2 = 3$. Найдите значение параметра a.

Сначала найдем корни данного уравнения. Для этого используем прямую теорему Виета: $x_1 + x_2 = 4$ — и данное равенство $2x_1 + x_2 = 3$. Решим систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$ методом сложения. Вычтем из первого уравнения второе: $2x_1 + x_2 - x_1 - x_2 = 3 - 4$, откуда $x_1 = -1$. Из второго уравнения находим $x_2 = 4 - x_1 = 4 - (-1) = 5$.

Теперь определим значение параметра a. Для этого еще раз используем прямую теорему Виета. Получаем $a = x_1x_2 = -1 \cdot 5 = -5$. Итак, $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$, $a = -5$.

Пример 7

При каком значении параметра a сумма корней уравнения $x^2 - (a^2 - 6a)x - a^2 - 1 = 0$ имеет наименьшую величину? Найдите эту величину.

Найдем дискриминант данного уравнения $D = (a^2 - 6a)^2 + 4(a^2 + 1)$. Очевидно, что при любых значениях a дискриминант положительный. Поэтому уравнение имеет два различных корня: x_1 и x_2. По прямой теореме Виета сумма этих корней $x_1 + x_2 = a^2 - 6a$. Преобразуем это выражение, выделив квадрат двучлена: $x_1 + x_2 = (a^2 - 6a + 9) = (a - 3)^2 - 9$. Видно, что сумма корней состоит из неотрицательного слагаемого $(a - 3)^2$ и отрицательного числа -9. Поэтому она будет наименьшей, если слагаемое $(a - 3)^2$ самое маленькое, т. е. $(a - 3)^2 = 0$, откуда $a = 3$. Итак, при $a = 3$ сумма корней данного уравнения наименьшая и равна -9.

IV. Задания на уроках

№ 580 (а, д); 581 (а, б); 583 (в, г); 585; 587; 589; 592; 593.

V. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и докажите прямую теорему Виета для уравнения $x^2 + px + q = 0$.
2. Сформулируйте и докажите прямую теорему Виета для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.
3. Сформулируйте и докажите обратную теорему Виета.

VI. Творческие задания

1. Напишите квадратное уравнение, корни которого равны:

а) $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{1}{2}$;

б) $x_1 = -\frac{1}{3}$ и $x_2 = -\frac{1}{3}$;

в) $x_1 = 2$ и $x_2 = -\frac{1}{5}$;

г) $x_1 = -3$ и $x_2 = \frac{1}{4}$;

д) $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = -\frac{1}{3}$;

е) $x_1 = \frac{1}{5}$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Ответы: а) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; б) $9x^2 + 6x + 1 = 0$; в) $5x^2 - 9x - 2 = 0$; г) $4x^2 + 11x - 3 = 0$; д) $6x^2 - x - 1 = 0$; е) $10x^2 + 3x - 1 = 0$.

2. Квадратное уравнение $3x^2 - 5x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Напишите квадратное уравнение, корни которого равны:

а) $-x_1$ и $-x_2$;

б) $3x_1$ и $3x_2$;

в) $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$;

г) $x_1 - 2$ и $x_2 - 2$;

д) $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$;

е) $\frac{2}{x_1}$ и $\frac{2}{x_2}$;

ж) $x_1 + x_2$ и x_1x_2;

з) $2x_1 + 2x_2$ и $5x_1x_2$.

Ответы: а) $3y^2 + 5y + 1 = 0$; б) $y^2 - 5y + 3 = 0$; в) $3y^2 - 11y + 9 = 0$; г) $3y^2 + 7y + 3 = 0$; д) $y^2 - 5y + 3 = 0$; е) $y^2 - 10y + 12 = 0$; ж) $9y^2 - 18y + 5 = 0$; з) $9y^2 - 45y + 50 = 0$.

3. Пусть корни квадратного уравнения $6x^2 - 5x - 2 = 0$ равны x_1 и x_2. Не решая уравнения, найдите:

а) $x_1 + x_2$; б) x_1x_2; в) $x_1^2 + x_2^2$; г) $x_1^3 + x_2^3$; д) $x_1x_2^3 + x_1^3x_2$; е) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; ж) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; з) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$; и) $|x_1 - x_2|$.

Ответы: а) $\frac{5}{6}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{49}{36}$; г) $\frac{305}{216}$; д) $-\frac{49}{108}$; е) $-\frac{5}{2}$; ж) $\frac{49}{4}$; з) $\frac{305}{24}$; и) $\frac{\sqrt{73}}{6}$.

4. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равны x_1 и x_2. Найдите:

а) $x_1 + x_2$; б) x_1x_2; в) $x_1^2 + x_2^2$; г) $x_1^3 + x_2^3$; д) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; е) $|x_1 - x_2|$.

Ответы: а) $-\frac{b}{a}$; б) $\frac{c}{a}$; в) $\frac{b^2 - 2ac}{a^2}$; г) $\frac{b\left(3ac - b^2\right)}{a^3}$; д) $-\frac{b}{c}$; е) $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$.

5. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равны x_1 и x_2. Напишите квадратное уравнение, корни которого равны:

а) $-x_1$ и $-x_2$; б) $3x_1$ и $3x_2$; в) $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$; г) $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

Ответы: а) $ay^2 - by + c = 0$; б) $ay^2 + 3by + 9c = 0$; в) $ay^2 + (b - 2a)y + (c - b + a) = 0$; г) $cy^2 + by + a = 0$.

6. Найдите корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если:

а) $a + b + c = 0$; б) $4a + 2b + c = 0$; в) $a - b + c = 0$; г) $4a - 2b + c = 0$.

Ответы: а) $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{c}{a}$; б) $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{c}{2a}$; в) $x_1 = -1$ и $x_2 = -\frac{c}{a}$; г) $x_1 = -2$ и $x_2 = -\frac{c}{2a}$.

7, а. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ наименьшая? Найдите ее.

7, б. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (a - 1)x + a^2 - 1{,}5 = 0$ наибольшая? Найдите ее.

Ответы: а) $a = 1$ и $x_1^2 + x_2^2 = 9$; б) $a = -1$ и $x_1^2 + x_2^2 = 5$.

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 580 (б, е); 581 (в, г); 583 (а, б); 586; 588; 590; 591; 594 (а).

Урок 53. Контрольная работа № 5 по теме «Квадратные уравнения»

Цели: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 самые простые, варианты 3, 4 сложнее и варианты 5, 6 самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую свободу выбора учащимся. При таких же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла, вариантов 5, 6 – 1 балл (т. е. оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач).

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимися (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Решите уравнение $5x^2 + 10x = 0$.
2. Решите уравнение $9x^2 - 4 = 0$.
3. Решите уравнение $x^2 - 7x + 6 = 0$.
4. Решите уравнение $2x^2 + 3x + 4 = 0$.
5. Один из корней уравнения $x^2 + ax + 72 = 0$ равен 9. Найдите другой корень и коэффициент a.
6. Периметр прямоугольника равен 26 см, а его площадь – 36 см^2. Найдите длины сторон прямоугольника.

Вариант 2

1. Решите уравнение $6x^2 + 18x = 0$.
2. Решите уравнение $4x^2 - 9 = 0$.
3. Решите уравнение $x^2 - 8x + 7 = 0$.
4. Решите уравнение $3x^2 + 5x + 6 = 0$.
5. Один из корней уравнения $x^2 + 11x + a = 0$ равен 3. Найдите другой корень и коэффициент a.
6. Периметр прямоугольника равен 22 см, а его площадь – 24 см^2. Найдите длины сторон прямоугольника.

Вариант 3

1. Решите уравнение $2x^2 - 7x + 5 = 0$.
2. Решите уравнение $(2x - 1)^2 - 9 = 0$.
3. Решите уравнение $x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$.
4. Напишите квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого -3 и $\frac{1}{2}$.
5. Катер прошел по течению реки 30 км и 24 км против течения за 9 ч. Чему равна собственная скорость катера, если скорость течения реки равна 3 км/ч?
6. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Вариант 4

1. Решите уравнение $3x^2 - 7x + 4 = 0$.
2. Решите уравнение $(3x + 1)^2 - 4 = 0$.
3. Решите уравнение $x^2 - 3ax - 4a^2 = 0$.

4. Напишите квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого -2 и $\frac{1}{3}$.

5. Моторная лодка прошла 45 км по течению реки и 22 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 2 км/ч.

6. Найдите сумму обратных величин корней уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Вариант 5

1. Решите уравнение $6x^2 + x - 2 = 0$.
2. Решите уравнение $(3x + 1)^2 = (x + 2)^2$.
3. Решите уравнение $x^2 - x - a^2 + a = 0$.
4. Даны четыре последовательных целых числа. Сумма произведений двух крайних и двух средних чисел равна 22. Найдите эти числа.
5. Найдите наименьшее значение суммы корней уравнения $x^2 + (8a - a^2)x - a^4 = 0$.
6. Уравнение $x^2 + 3x - 2a^2 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Напишите квадратное уравнение, корни которого равны $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$.

Вариант 6

1. Решите уравнение $9x^2 + 3x - 2 = 0$.
2. Решите уравнение $(4x + 3)^2 = (2x - 1)^2$.
3. Решите уравнение $x^2 + 3x - 4a^2 + 6a = 0$.
4. Даны четыре последовательных целых числа. Сумма произведений двух крайних и двух средних чисел равна 38. Найдите эти числа.
5. Найдите наибольшее значение суммы корней уравнения $x^2 + (a^2 - 6a)x - 3a^2 = 0$.
6. Уравнение $x^2 + 2x - 3a^2 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Напишите квадратное уравнение, корни которого равны $x_1 - 1$ и $x_2 - 1$.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ (число решивших задачу правильно или почти правильно);

± (число решивших задачу со значительными погрешностями);

– (число не решивших задачу);

∅ (число не решавших задачу).

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими их).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям и разобрать наиболее трудные варианты).

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. $x_1 = 0$ и $x_2 = -2$.
2. $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$.
3. $x_1 = 6$ и $x_2 = 1$.
4. Решений нет.
5. $a = -17$ и $x_2 = 8$;
6. 4 см и 9 см.

Вариант 2

1. $x_1 = 0$ и $x_2 = -3$.
2. $x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}$.
3. $x_1 = 7$ и $x_2 = 1$.
4. Решений нет.
5. $a = -42$ и $x_2 = -14$.
6. 3 см и 8 см.

Вариант 3

1. $x_1 = \frac{5}{2}$ и $x_2 = 1$.
2. $x_1 = 2$ и $x_2 = -1$.
3. $x_1 = a$ и $x_2 = -3a$.
4. $2x^2 + 5x - 3 = 0$.
5. 7 км/ч.
6. $p^2 - 2q$.

Вариант 4

1. $x_1 = \frac{4}{3}$ и $x_2 = 1$.
2. $x_1 = \frac{1}{3}$ и $x_2 = -1$.
3. $x_1 = 4a$ и $x_2 = -a$.
4. $3x^2 + 5x - 2 = 0$.
5. 13 км/ч.
6. $-\frac{p}{q}$.

Вариант 5

1. Для квадратного уравнения $6x^2 + x - 2 = 0$ найдем дискриминант: $D = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 49$ — и корни: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm 7}{12}$, т. е. $x_1 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}$.

2. Уравнение $(3x + 1)^2 = (x + 2)^2$ запишем в виде $(3x + 1)^2 - (x + 2)^2 = 0$. Используя формулу разности квадратов, разложим левую часть уравнения на множители: $(3x + 1 - (x + 2)) \cdot (3x +$

$+ 1 + x + 2) = 0$, или $(2x - 1)(4x + 3) = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $2x - 1 = 0$ (его корень $x_1 = \frac{1}{2}$) и $4x + 3 = 0$ (корень $x_2 = -\frac{3}{4}$).

Ответ: $\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$.

3. Для квадратного уравнения $x^2 - x - a^2 + a = 0$ найдем дискриминант: $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a^2 + a) = 1 + 4a^2 - 4a = (2a - 1)^2$ —и корни: $x_{1,2} = \frac{1 \pm (2a-1)}{2}$, т. е. $x_1 = a$ и $x_2 = 1 - a$.

Ответ: a; $1 - a$.

4. Пусть даны четыре последовательных целых числа: x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$. Тогда произведение двух крайних чисел равно $x(x + 3) = x^2 + 3x$, произведение средних чисел равно $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$. Сумма этих произведений равна 22. Получаем уравнение $(x^2 + 3x) + (x^2 + 3x + 2) = 22$, или $x^2 + 3x - 10 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = -5$ и $x_2 = 2$. Поэтому получаем два набора чисел: $-5, -4, -3, -2$ и $2, 3, 4, 5$.

Ответ: $-5, -4, -3, -2$ и $2, 3, 4, 5$.

5. Найдем дискриминант квадратного уравнения $x^2 + (8a - a^2)x - a^4 = 0$: $D = (8a - a^2)^2 + 4a^4$. Очевидно, что при всех значениях параметра a $D \geq 0$. Поэтому данное уравнение при всех a имеет корни. По теореме Виета сумма корней уравнения $x_1 + x_2 = -(8a - a^2) = a^2 - 8a$. В этом выражении выделим полный квадрат разности $x_1 + x_2 = -(a^2 - 8a + 16) - 16 = (a - 4)^2 - 16$. Так как при всех значениях параметра a выражение $(a - 4)^2 \geq 0$, то сумма корней $x_1 + x_2 \geq -16$. Поэтому наименьшее значение суммы корней равно -16 и достигается при условии $a - 4 = 0$, т. е. $a = 4$.

Ответ: -16.

6. Для уравнения $x^2 + 3x - 2a^2 = 0$ найдем дискриминант: $D = 9 + 8a^2$. Так как при всех значениях a $D > 0$, то данное уравнение имеет два различных корня: x_1 и x_2. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -3$ и $x_1 \cdot x_2 = -2a^2$. Пусть искомое уравнение имеет вид $y^2 + py + q = 0$ и корни $y_1 = x_1 + 1$ и $y_2 = x_2 + 1$. Найдем сумму этих корней: $y_1 + y_2 = (x_1 + 1) + (x_2 + 1) = (x_1 + x_2) + 2 = - 3 + 2 = -1$ — и их произведение: $y_1y_2 = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = -2a^2 - 3 + 1 = -2a^2 - 2$. Тогда по теореме Виета $p_1 = -(y_1 + y_2) = -(-1) = 1$ и $q = y_1y_2 = -2a^2 - 2$. Поэтому искомое уравнение имеет вид $y^2 + y - 2a^2 - 2 = 0$.

Ответ: $y^2 + y - 2a^2 - 2 = 0$.

Вариант 6

1. Для квадратного уравнения $9x^2 + 3x - 2 = 0$ найдем дискриминант: $D = 3^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-2) = 81$ – и корни: $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 9} = \dfrac{-3 \pm 9}{18}$, т. е. $x_1 = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$ и $x_2 = -\dfrac{12}{18} = -\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}$; $-\dfrac{2}{3}$.

2. Уравнение $(4x + 3)^2 = (2x - 1)^2$ запишем в виде $(4x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 0$. Используя формулу разности квадратов, разложим левую часть уравнения на множители: $(4x + 3 - (2x - 1)) \cdot (4x + 3 + 2x - 1) = 0$ или $(2x + 4)(6x + 2) = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $2x + 4 = 0$ (его корень $x_1 = -2$) и $6x + 2 = 0$ (корень $x_2 = -\dfrac{1}{3}$).

Ответ: -2; $-\dfrac{1}{3}$.

3. Для квадратного уравнения $x^2 + 3x - 4a^2 + 6a = 0$ найдем дискриминант: $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4a^2 + 6a) = 16a^2 - 24a + 9 = (4a - 3)^2$ – и корни: $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm (4a - 3)}{2}$, т. е. $x_1 = 2a - 3$ и $x_2 = -2a$.

Ответ: $2a - 3$; $-2a$.

4. Пусть даны четыре последовательных целых числа: x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$. Тогда произведение двух крайних чисел равно $x(x + 3) = x^2 + 3x$, произведение средних чисел равно $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$. Сумма этих произведений равна 38. Получаем уравнение $(x^2 + 3x) + (x^2 + 3x + 2) = 38$, или $x^2 + 3x - 18 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = -6$ и $x_2 = 3$. Поэтому получаем два набора чисел: $-6, -5, -4, -3$ и $3, 4, 5, 6$.

Ответ: $-6, -5, -4, -3$ и $3, 4, 5, 6$.

5. Найдем дискриминант квадратного уравнения $x^2 + (a^2 - 6a)x - 3a^2 = 0$: $D = (a^2 - 6a)^2 + 12a^2$. Очевидно, что при всех значениях параметра a $D \geq 0$. Поэтому данное уравнение при всех a имеет корни. По теореме Виета сумма корней уравнения $x_1 + x_2 = -(a^2 - 6a)$. В этом выражении выделим полный квадрат разности: $x_1 + x_2 = -(a^2 - 6a + 9) + 9 = -(a - 3)^2 + 9$. Так как при всех значениях параметра a выражение $-(a - 3)^2 \leq 0$, то сумма корней $x_1 + x_2 \leq 9$. Поэтому наибольшее значение суммы корней равно 9 и достигается при условии $a - 3 = 0$, т. е. $a = 3$.

Ответ: 9.

6. Для уравнения $x^2 + 2x - 3a^2 = 0$ найдем дискриминант: $D = 4 + 12a^2$. Так как при всех значениях a $D > 0$, то данное уравнение имеет два различных корня x_1 и x_2. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -2$ и $x_1x_2 = -3a^2$. Пусть искомое уравнение имеет вид $y^2 + py + q = 0$ и корни $y_1 = x_1 - 1$ и $y_2 = x_2 - 1$. Найдем сумму этих корней: $y_1 + y_2 = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) = (x_1 + x_2) - 2 = -2 - 2 = -4$ – и их произведение: $y_1y_2 = (x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = -3a^2 - (-2) + 1 = -3a^2 + 3$. Тогда по теореме Виета $p_1 = -(y_1 + y_2) = -(-4) = 4$ и $q = y_1y_2 = -3a^2 + 3$. Поэтому искомое уравнение имеет вид $y^2 + 4y - 3a^2 + 3 = 0$.

Ответ: $y^2 + 4y - 3a^2 + 3 = 0$.

VI. Подведение итогов урока

§ 9. ДРОБНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уроки 54–57. Решение дробных рациональных уравнений

Цель: научить решать дробные рациональные уравнения путем преобразования их в линейные или квадратные уравнения.

Планируемые результаты: отработать навыки решения дробных рациональных уравнений.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

План уроков

1. Понятие рационального уравнения.
2. Решение рациональных уравнений.
3. Примеры решения более сложных уравнений.

1. Понятие рационального уравнения

Пример 1

Рассмотрим уравнения:

а) $3x + 4 = 2(1 - x^2)$; б) $\frac{x+1}{2} = \frac{x^2 - x + 1}{3}$; в) $x^2 - \frac{5+x}{x} = x + 7$; г) $\frac{2x-1}{x^2+1} = \frac{3}{x+1}$; д) $\frac{3x+1}{x-1} = x$; е) $x + 1 = \sqrt{x-1}$.

По аналогии с алгебраическими выражениями назовем данные уравнения.

Уравнения, в которых обе части являются рациональными выражениями, называют *рациональными уравнениями*. В примере 1 рациональными являются уравнения *а–д*. Рациональные уравнения, в которых обе части являются целыми выражениями, называют *целыми уравнениями*. В примере 1 целыми являются уравнения *а*, *б* (квадратные уравнения). Рациональные уравнения, в которых хотя бы одна из частей является дробным выражением, называют *дробными рациональными уравнениями*. В примере 1 такими являются уравнения *в–д*.

2. Решение рациональных уравнений

Основной способ решения рациональных уравнений состоит в преобразовании их в простейшие целые уравнения – линейные или квадратные.

Пример 2

Решим целое уравнение $\frac{x^2+9}{6} - \frac{2x}{3} = \frac{x}{6} + \frac{1}{2}$.

Наименьший общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, равен 6. Умножим все члены уравнения на это число и получим равносильное уравнение $x^2 + 9 - 2 \cdot 2x = x + 3$. Перенесем все члены в левую часть и получим равносильное квадратное уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$ являются также и корнями данного уравнения.

Пример 3

Решим дробное рациональное уравнение $\frac{x^2 - 6x + 8}{2 - x} = 1$.

По аналогии с предыдущим примером умножим обе части уравнения на знаменатель $2 - x$ (при условии, что $2 - x \neq 0$ (т. е. $x \neq 2$)) и по свойству уравнений получим равносильное уравнение $x^2 - 6x + 8 = 2 - x$. Перенесем все члены в левую часть и получим равносильное уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ (при условии, что $x \neq 2$). Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Однако корнем данного уравнения является только $x = 3$.

Пример 4

Решим дробное рациональное уравнение

$$\frac{2x-8}{x-5} + \frac{10}{(x-5)(x+5)} = \frac{x+4}{x+5}.$$

Общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, равен $(x - 5)(x + 5)$. Умножим все члены уравнения на это выражение (при условии, что $(x - 5)(x + 5) \neq 0$ (т. е. $x \neq \pm 5$)) и получим равносильное уравнение $(2x - 8)(x + 5) + 10 = (x + 4)(x - 5)$, или

$2x^2 + 10x - 8x - 40 + 10 = x^2 + 4x - 5x - 20$, или $2x^2 + 2x - 30 = x^2 - x - 20$. Перенесем все члены уравнения в левую часть и приведем подобные члены. Получаем равносильное квадратное уравнение $x^2 + 3x - 10 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = -5$ и $x_2 = 2$. Условию $x \neq \pm 5$ удовлетворяет только корень $x = 2$. Поэтому корень данного уравнения $x = 2$.

Пример 5

Решим дробное рациональное уравнение

$$\frac{x+3}{4x^2-9} - \frac{3-x}{4x^2+12x+9} = \frac{2}{2x-3}.$$

Разложим знаменатели дробей, входящих в уравнение, на множители: $\frac{x+3}{(2x-3)(2x+3)} - \frac{3-x}{(2x+3)^2} = \frac{2}{2x-3}$. Общий знаменатель этих дробей $(2x-3)(2x+3)^2$. Умножим все члены данного уравнения на это выражение (при условии, что оно не равно нулю (т. е. $x \neq \pm 1{,}5$)) и получим равносильное уравнение $(x + 3)(2x + 3) - (3 - x)(2x - 3) = 2(2x + 3)^2$, или $2x^2 + 3x + 6x + 9 - 6x + 9 + 2x^2 - 3x = 8x^2 + 24x + 18$, или $4x^2 + 18 = 8x^2 + 24x + 18$. Перенесем все члены уравнения в правую часть и приведем подобные члены. Получаем равносильное неполное квадратное уравнение $0 = 4x^2 + 24x$ или $0 = x(x + 6)$. Оба корня этого уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = -6$ удовлетворяют условию $x \neq \pm 1{,}5$ и являются корнями данного уравнения.

При решении дробных рациональных уравнений целесообразно:

1. Разложить все знаменатели дробей, входящих в уравнение, на множители.
2. Найти общий знаменатель этих дробей.
3. Умножить все члены данного уравнения на общий знаменатель.
4. Решить получившееся целое уравнение.
5. Из корней этого уравнения исключить те, которые обращают в нуль общий знаменатель данного уравнения.

3. Примеры решения более сложных уравнений

Достаточно часто встречаются дробные рациональные уравнения, содержащие знаки модуля или параметры.

Пример 6

Решим уравнение $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 2$.

Если модуль некоторой величины равен 2, то сама величина равна ± 2. Рассмотрим эти случаи.

а) $\dfrac{x+1}{x-1}=2$. Умножим обе части этого уравнения на знаменатель $x-1$ и получим $x+1=2(x-1)$, или $x+1=2x-2$, откуда $x=3$. Заметим, что для такого значения x знаменатель дроби $x-1\neq 0$. Поэтому $x=3$ – корень данного уравнения.

б) $\dfrac{x+1}{x-1}=-2$. Опять умножим обе части этого уравнения на знаменатель $x-1$ и получим $x+1=-2(x-1)$, или $x+1=-2x+2$, или $3x=1$, откуда $x=\dfrac{1}{3}$. При этом знаменатель дроби $x-1\neq 0$. Значит, $x=\dfrac{1}{3}$ – также корень данного уравнения.

Пример 7

Решим уравнение $\dfrac{x^2-3x}{|x-2|}=2$.

Используя определение модуля, раскроем знак модуля, рассмотрев два случая.

а) Если $x-2>0$ (т. е. $x>2$), то $|x-2|=x-2$ и уравнение имеет вид $\dfrac{x^2-3x}{x-2}=2$. Умножим обе части этого уравнения на $x-2$ и получим квадратное уравнение $x^2-3x=2(x-2)$, или $x^2-5x+4=0$. Корни этого уравнения $x_1=1$ и $x_2=4$. Условию $x>2$ удовлетворяет только корень $x=4$. Поэтому $x=4$ – корень данного уравнения.

б) Если $x-2<0$ (т. е. $x<2$), то $|x-2|=-(x-2)=2-x$ и уравнение имеет вид $\dfrac{x^2-3x}{2-x}=2$. Умножим обе части этого уравнения на $2-x$ и получим квадратное уравнение $x^2-3x=$ $=2(2-x)$, или $x^2-x-4=0$. Корни этого уравнения $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$. Условию $x<2$ удовлетворяет только корень $x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$. Поэтому $x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$ – также корень данного уравнения.

Пример 8

Решим уравнение $\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{6}{x-a}+1$.

Умножим все члены уравнения на общий знаменатель дробей $(x+2)(x-a)$ (при условии, что $x+2\neq 0$ и $x-a\neq 0$) и получим: $x(x-a)=6(x+2)+(x+2)(x-a)$, или $x^2-ax=6x+12+x^2-ax+$

$+\ 2x - 2a$. Перенесем все члены уравнения в правую часть, приведем подобные члены и получим линейное уравнение $0 = 8x +$ $+\ 12 - 2a$. Решим это уравнение. Имеем: $a - 6 = 4x$, откуда $x = \dfrac{a-6}{4}$.

Так как параметр a может принимать любые значения, то найденное решение $x = \dfrac{a-6}{4}$ может оказаться таким, что $x + 2 = 0$ или $x - a = 0$. Найдем, при каких значениях параметра a выполняется хотя бы одно из этих условий.

а) $x + 2 = \dfrac{a-6}{4} + 2 = \dfrac{a+2}{4}$. Величина $\dfrac{a+2}{4}$ равна нулю при $a = -2$.

б) $x - 2 = \dfrac{a-6}{4} - a = \dfrac{-3a-6}{4} = \dfrac{-3(a+2)}{4}$. Величина $\dfrac{-3(a+2)}{4}$ равна нулю также при $a = -2$.

Итак, при $a \neq -2$ уравнение имеет корень $x = \dfrac{a-6}{4}$, при $a = -2$ уравнение корней не имеет (так как при этом знаменатели дробей в данном уравнении равны нулю).

Пример 9

При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{(a+4)x^2 + 6x - 1}{x+3} = 0$ имеет единственное решение?

Данная дробь равна нулю, если ее числитель $(a + 4)x^2 + 6x -$ $-\ 1 = 0$ и при этом знаменатель $x + 3 \neq 0$ (т. е. $x \neq -3$). Поэтому данное уравнение имеет единственное решение в двух случаях.

а) Если уравнение $(a + 4)x^2 + 6x - 1 = 0$ имеет единственный корень, не равный числу -3. Это возможно в двух случаях:

- если уравнение $(a + 4)x^2 + 6x - 1 = 0$ является линейным. Это возможно, если старший коэффициент уравнения $a + 4 = 0$, откуда $a = -4$. Для такого значения a уравнение имеет вид $6x - 1 = 0$ и единственный корень $x = \dfrac{1}{6}$ (не равный числу -3);
- если уравнение $(a + 4)x^2 + 6x - 1 = 0$ является квадратным, но имеет один корень. Это возможно при двух условиях: $a + 4 \neq 0$ (т. е. $a \neq -4$) и дискриминант $D = 36 + 4(a + 4) =$ 0. Решим это уравнение: $9 + a + 4 = 0$, откуда $a = -13$. Это значение $a = -13$ удовлетворяет и условию $a \neq -4$.

б) Если уравнение $(a + 4)x^2 + 6x - 1 = 0$ имеет два корня, но один из этих корней равен числу -3 (и не является решением данного уравнения). Найдем, при каком значении параметра a

уравнение $(a + 4)x^2 + 6x - 1 = 0$ имеет корень, равный -3. Подставим значение $x = -3$ в уравнение $(a + 4)x^2 + 6x - 1 = 0$ и получим $(a + 4) \cdot 9 + 6 \cdot (-3) - 1 = 0$, или $9a + 17 = 0$, откуда $a = -\frac{17}{9}$.

При $a = -\frac{17}{9}$ уравнение $(a + 4)x^2 + 6x - 1 = 0$ имеет вид $\frac{19}{9}x^2 + 6x - 1 = 0$, или $19x^2 + 54x - 9 = 0$. Один корень этого уравнения известен: $x_1 = -3$. Второй корень найдем, используя теорему Виета: $x_1x_2 = -\frac{9}{19}$, тогда $x_2 = -\frac{9}{19x_1} = \frac{3}{19}$. Очевидно, что этот корень не равен числу -3.

Итак, при $a = -4$, $a = -13$ и $a = -\frac{17}{9}$ данное уравнение имеет единственное решение.

III. Задания на уроках

№ 600 (в, е); 601 (а, в); 603 (а, б); 605 (б); 606 (а, б); 608 (а, в); 610; 611 (а).

IV. Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называют рациональным?
2. Дайте определение целого уравнения.
3. Что называют дробным рациональным уравнением?
4. Каким является: а) линейное уравнение; б) квадратное уравнение?

V. Творческие задания

1. Решите уравнение:

а) $\left|\frac{3x-1}{2x+5}\right| = 2$; д) $\frac{|x-2|+1}{2x+1} = -1$;

б) $\left|\frac{2x-1}{3x+2}\right| = 3$; е) $\frac{|3x+4|}{x+1} = -2$;

в) $\left|\frac{x^2-3x}{x+1}\right| = 2x-1$; ж) $\frac{|x-3|}{3-x} = -1$;

г) $\left|\frac{5x^2-2x}{2x+1}\right| = 3x-2$; з) $\frac{|x-2|}{x-2} = -1$.

Ответы: а) $x_1 = -11$ и $x_2 = -\frac{9}{7}$; б) $x_1 = -1$ и $x_2 = -\frac{5}{11}$; в) $x = 1$; г) $x = 1$; д) $x = -4$; е) $x_1 = -\frac{6}{5}$ и $x_2 = -2$; ж) $x > 3$; з) $x < 2$.

2. При всех значениях параметра a решите уравнение:

а) $\dfrac{a+2}{x-2} = a-1$;

б) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{a-1}{a+x}$;

в) $\dfrac{a}{x} - 6 = \dfrac{2}{x}$;

г) $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{a}{x+1}$;

д) $\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{a-1}{a+1}$;

е) $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{a+1}{a-1}$;

ж) $\dfrac{x+a}{x-a} + \dfrac{x-a}{x+a} = \dfrac{10}{3}$;

з) $\dfrac{3x-2a}{x+a} + \dfrac{x+a}{3x-2a} = 2\dfrac{1}{2}$.

Ответы: а) при $a \neq -2$ и $a \neq 1$ $x = \dfrac{3a}{a-1}$, при $a = -2$ или $a = 1$ решений нет;

б) при $a \neq 0$, $a \neq 1$ и $a \neq 2$ $x = \dfrac{a}{a-2}$, при $a = 0$, $a = 1$ или $a = 2$ решений нет;

в) при $a \neq 2$ $x = \dfrac{a-2}{6}$, при $a = 2$ решений нет;

г) при $a \neq 0$ $x = \dfrac{a+1}{a-1}$, при $a = 0$ решений нет;

д) при $a \neq -1$ и $a \neq 0$ $x = \dfrac{1}{a}$, при $a = -1$ или $a = 0$ решений нет;

е) при $a \neq 1$ $x = -a$, при $a = 1$ решений нет;

ж) при $a \neq 0$ $x_1 = -2a$ и $x_2 = 2a$, при $a = 0$ решений нет;

з) при $a \neq 0$ $x_1 = -4a$ и $x_2 = a$, при $a = 0$ решений нет.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 600 (а, б, д); 602 (в, ж); 603 (г, е); 605 (в); 606 (в, г); 609 (в); 611 (б).

Уроки 58–60. Решение задач с помощью рациональных уравнений

Цель: использовать рациональные уравнения для решения текстовых задач.

Планируемые результаты: научиться применять рациональные уравнения для решения текстовых задач.

Тип уроков: продуктивные уроки, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Решите уравнение:

1. $\frac{x^2-5x+9}{x-6}=\frac{2x+3}{x-6}$;
2. $\frac{3(x-1)}{3x-2}+\frac{2(x+3)}{3x+2}=2$;
3. $\frac{|2x-1|+x+1}{4x-2}=1$;
4. $\frac{a}{a+x}=\frac{3a}{x}$.

Вариант 2

Решите уравнение:

1. $\frac{x^2-2x+8}{x-3}=\frac{3x+2}{x-3}$;
2. $\frac{4x+7}{2x-3}-\frac{x-3}{2x+3}=1$;
3. $\frac{|3x+2|+x+2}{x+3}=1$;
4. $\frac{2a}{a-x}=\frac{5a}{x}$.

III. Работа по теме уроков

Многие текстовые задачи (особенно на движение и совместную работу) сводятся к решению дробных рациональных уравнений.

Пример 1

Грузовик остановился для заправки горючим на 24 мин. Увеличив свою скорость на 10 км/ч, он наверстал потерянное время на расстоянии 80 км. С какой скоростью двигался грузовик после остановки?

Пусть первоначальная скорость грузовика x (км/ч). Тогда 80 км он проехал бы за время $\frac{80}{x}$ (ч). На самом деле грузовик сначала задержался на 24 мин (или $\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$ ч). Потом он увеличил скорость на 10 км/ч и стал двигаться со скоростью $x+10$ (км/ч). Поэтому 80 км он преодолел за $\frac{80}{x+10}$ (ч) и компенсировал потерянное время. Получаем дробное рациональное уравнение $\frac{80}{x}=\frac{2}{5}+\frac{80}{x+10}$. Решим его.

Умножим все члены уравнения на общий знаменатель дробей $5x(x+10)$ и получим: $80\cdot5\cdot(x+10)=2x(x+10)+80\cdot5x$, или

$400x + 4000 = 2x^2 + 20x + 400x$, или $0 = x^2 + 10x - 2000$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = -50$ и $x_2 = 40$. Очевидно, что (по смыслу задачи) подходит только корень $x = 40$. Тогда грузовик двигался со скоростью $40 + 10 = 50$ (км/ч).

Пример 2

Один кран наполняет бассейн на 6 ч быстрее другого. Два крана, работая вместе, наполняют бассейн за 4 ч. За сколько часов может наполнить бассейн каждый кран, работая отдельно?

Пусть один кран наполнит бассейн за x (ч), тогда другой кран – за $x + 6$ (ч). Пусть объем бассейна составляет V (л). Тогда первый кран в час наливает в бассейн $\frac{V}{x}$ (л), второй кран – $\frac{V}{x+6}$ (л). Вместе в час они наливают $\frac{V}{x}+\frac{V}{x+6}$ (л). С другой стороны, эти краны наполняют бассейн за 4 ч и в час наливают в него $\frac{V}{4}$ (л). Поэтому получаем дробное рациональное уравнение $\frac{V}{x}+\frac{V}{x+6}=\frac{V}{4}$. Решим его.

Разделим все члены уравнения на V (очевидно, что $V \neq 0$) и получим $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}$. Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей $4x(x + 6)$ и получим $4(x + 6) + 4x = x(x + 6)$, или $4x + 24 + 4x = x^2 + 6x$, или $0 = x^2 - 2x - 24$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 6$ и $x_2 = -4$ (не подходит). Итак, один кран заполнит бассейн за 6 ч, другой кран – за $6 + 6 = 12$ (ч).

Пример 3

Знаменатель несократимой обыкновенной дроби больше ее числителя на 5. Если и числитель, и знаменатель увеличить на 2, то полученная дробь будет больше первоначальной на $\frac{1}{8}$. Найдите первоначальную дробь.

Пусть числитель данной дроби равен x, тогда ее знаменатель равен $x + 5$, и дробь имеет вид $\frac{x}{x+5}$. После увеличения на 2 числитель дроби стал равен $x + 2$, знаменатель – $x + 7$. Полученная дробь имеет вид $\frac{x+2}{x+7}$. По условию новая дробь больше данной на $\frac{1}{8}$. Поэтому имеем дробное рациональное уравнение $\frac{x+2}{x+7}-\frac{x}{x+5}=\frac{1}{8}$. Решим его.

Умножим все члены уравнения на общий знаменатель дробей $8(x+7)(x+5)$ и получим: $8(x+2)(x+5) - 8x(x+7) = (x+7)(x+5)$, или $8x^2 + 56x + 80 - 8x^2 - 56x = x^2 + 12x + 35$, или $0 = x^2 + 12x - 45$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 3$ и $x_2 = -15$ (не подходит). Итак, числитель дроби 3, ее знаменатель $3 + 5 = 8$. Тогда данная дробь равна $\frac{3}{8}$.

IV. Задания на уроках

№ 617; 620; 621; 625; 626; 628; 630; 633; 634.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 618; 619; 622; 624; 627; 629; 631; 632; 635.

Уроки 61, 62. Графический способ решения уравнений. Уравнения с параметром

Цель: научить использовать графики функций для решения или исследования уравнений.

Планируемые результаты: научиться применять графики для решения уравнения и исследования его корней.

Тип уроков: урок-лекция, урок-исследование.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Катер прошел 46 км по течению реки и 17 км против течения, затратив на весь путь 3 ч. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки 3 км/ч.

2. Знаменатель несократимой обыкновенной дроби на 7 больше ее числителя. Если числитель дроби увеличить на 3, а ее знаменатель уменьшить на 3, то полученная дробь будет на $\frac{11}{18}$ больше данной дроби. Найдите данную дробь.

Вариант 2

1. Катер прошел 20 км по течению реки и 32 км против течения, затратив на весь путь 3 ч. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки 2 км/ч.

2. Знаменатель несократимой обыкновенной дроби на 5 больше ее числителя. Если числитель дроби увеличить на 2, а ее знаменатель уменьшить на 2, то полученная дробь будет на $\frac{18}{35}$ больше данной дроби. Найдите данную дробь.

III. Работа по теме уроков

План уроков

1. Графическое решение уравнений.
2. Решение уравнений с параметром.
3. Исследование уравнений с параметром.

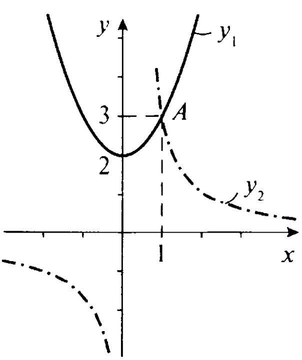
1. Графическое решение уравнений

Во многих случаях для решения или исследования уравнений используют графики функций.

Пример 1

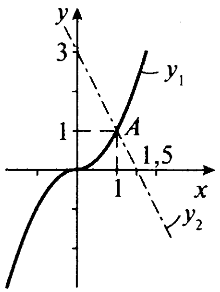
Решим уравнение $x^2 + 2 = \frac{3}{x}$.

В одной координатной плоскости построим графики функций $y_1 = x^2 + 2$ и $y_2 = \frac{3}{x}$. Видно, что эти графики пересекаются в единственной точке A (1; 3). Абсцисса точки пересечения A есть то значение переменной x, при котором значения функций y_1 и y_2 равны (или выражения $x^2 + 2$ и $\frac{3}{x}$ принимают равные значения). Итак, данное уравнение $x^2 + 2 = \frac{3}{x}$ имеет единственный корень $x = 1$.



Заметим, что для нахождения корня данного уравнения могут быть рассмотрены графики и других функций. Учтем, что в уравнении $x^2 + 2 = \frac{3}{x}$ $x \neq 0$. Умножим все члены уравнения на x

и получим равносильное уравнение $x^3 + 2x = 3$, или $x^3 = 3 - 2x$. Построим графики функций $y_1 = x^3$ и $y_2 = 3 - 2x$. Видно, что графики этих функций пересекаются в единственной точке A (1; 1). При $x = 1$ значения функций y_1 и y_2 равны (или выражения x^3 и $3 - 2x$ принимают равные значения). Итак, $x = 1$ — единственный корень данного уравнения.

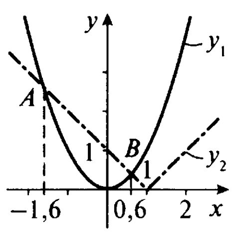


Рассмотренный способ решения уравнения называют *графическим*.

Пример 2

Графически решим уравнение $x^2 = |x - 1|$.

В одной системе координат построим графики функций $y_1 = x^2$ и $y_2 = |x - 1|$. Видно, что эти графики пересекаются в двух точках: A и B. Приближенное значение абсцисс этих точек $x_1 \approx -1{,}6$ и $x_2 \approx 0{,}6$ соответственно. Заметим, что, решив аналитически данное уравнение, получим $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.



2. Решение уравнений с параметром

В 7 и 8 классах мы уже встречались с простейшими уравнениями с параметром. Заметим, что решение и исследование уравнений с параметром очень непростая задача, и этому вопросу посвящена обширная литература. Здесь упорядочим накопленные познания и навыки решения задач.

Достаточно часто встречаются уравнения с двумя переменными, которые имеют различный смысл. Одна из переменных считается неизвестной величиной и обозначается последними буквами латинского алфавита (x, y, z). Другая переменная считается параметром, обозначается первыми буквами латинского алфавита (a, b, c) и может принимать любые значения.

Цель решения уравнения с параметром – показать, каким образом для любого значения параметра можно найти соответствующее множество корней уравнения, если корни существуют, или установить, что при этом значении параметра корней нет. Уравнение с параметром решается так же, как подобное уравнение без параметра.

Пример 3

Решим уравнение $(a^2 - 1)x = a^2 - 2a + 1$.

Данное уравнение относительно неизвестной x является линейным. Поэтому будем решать уравнение как линейное. Чтобы найти величину x, надо обе части уравнения разделить на коэффициент $a^2 - 1$ при переменной x. Сделать это можно, если этот коэффициент не равен нулю, т. е. $a^2 - 1 \neq 0$ (или $a \neq \pm 1$). Тогда получаем: $x = \dfrac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 1} = \dfrac{(a-1)^2}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{a-1}{a+1}$. Таким образом, при любом значении параметра a (кроме $a = \pm 1$) уравнение имеет единственное решение, которое можно найти по формуле $x = \dfrac{a-1}{a+1}$.

Теперь необходимо решить данное уравнение при значениях $a = \pm 1$. Поочередно подставим эти величины в уравнение. При $a = 1$ уравнение имеет вид $(1^2 - 1)x = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1$, или $0 \cdot x = 0$. Очевидно, что любое действительное число x является решением данного уравнения (бесконечное множество решений).

Подставим также значение $a = -1$ в уравнение и получим: $((-1)^2 - 1)x = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1$, или $0 \cdot x = 4$. Разумеется, такое уравнение корней не имеет.

Итак, в зависимости от значений параметра a данное уравнение имеет следующие решения: при $a \neq \pm 1$ $x = \dfrac{a-1}{a+1}$ (единственное решение), при $a = 1$ x – любое действительное число (бесконечное множество решений), при $a = -1$ решений нет.

Пример 4

При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{a-1}{a+x} = \dfrac{3}{x}$ не имеет решений?

Данное уравнение имеет смысл только при значениях переменных a и x, удовлетворяющих условиям $a + x \neq 0$ и $x \neq 0$. Используя свойство пропорции, запишем рациональное уравнение в виде $(a-1)x=3(a+x)$. Это уравнение является линейным по неизвестной x. Запишем его в виде $(a-1)x \neq 3a+3x$ или $(a-4)x=3a$.

Очевидно, что при $a=4$ это линейное уравнение не имеет решений. Для $a \neq 4$ уравнение имеет единственный корень $x=\dfrac{3a}{a-4}$. Однако этот корень может оказаться таким, при котором данное уравнение не имеет смысла.

Найдем $a+x=a+\dfrac{3a}{a-4}=\dfrac{a^2-a}{a-4}=\dfrac{a(a-1)}{a-4}$. Значение этого выражения равно нулю при $a=0$ и $a=1$. Величина $x=\dfrac{3a}{a-4}$ равна нулю при $a=0$.

Итак, данное рациональное уравнение не имеет решений при $a=0$, $a=1$ и $a=4$.

Пример 5

Решим уравнение $ax^2-(a+1)^2x+(a+1)^2=0$.

Старший коэффициент уравнения зависит от параметра a. Поэтому необходимо рассмотреть два случая.

1. При $a=0$ данное уравнение является линейным: $-x+1=0$ — и имеет единственный корень $x=1$.

2. При $a \neq 0$ данное уравнение является квадратным. Найдем его дискриминант: $D=(a+1)^4-4a(a+1)^2=(a+1)^2((a+1)^2-$ $-4a)=(a+1)^2(a-1)^2$ — и корни: $x_{1,2}=\dfrac{(a+1)^2 \pm (a+1)(a-1)}{2a}=$ $=\dfrac{(a+1)((a+1) \pm (a-1))}{2a}$, т. е. $x_1=a+1$ и $x_2=\dfrac{a+1}{a}$.

При $D>0$ (т. е. $a \neq \pm 1$) корни $x_1=a+1$ и $x_2=\dfrac{a+1}{a}$ различные. Дискриминант $D=0$ при $a=\pm 1$, и корни x_1 и x_2 совпадают (или уравнение имеет единственный корень). При этом для $a=1$ $x_1=x_2=2$, для $a=-1$ $x_1=x_2=0$.

Итак, при $a=0$ уравнение имеет единственный корень $x=1$; при $a=1$ единственный корень $x=2$; при $a=-1$ единственный корень $x=0$; при $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$ два различных корня: $x_1=a+1$ и $x_2=\dfrac{a+1}{a}$.

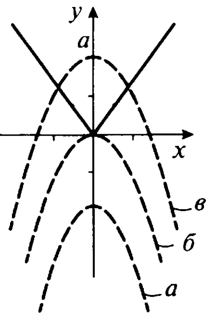
3. Исследование уравнений с параметром

В ряде случаев нет необходимости решать уравнение. Вопрос может стоять о числе корней уравнения, их расположении и т. д. При этом удобно использовать графики для исследования уравнения с параметром.

Пример 6

Определим число корней уравнения $x^2 + |x| - a = 0$.

Запишем уравнение в виде $|x| = a - x^2$ и построим графики функций $y_1 = |x|$ (ломаная линия) и $y_2 = a - x^2$ (парабола). При этом парабола пересекает ось ординат в точке $y = a$ и направлена ветвями вниз. При изменении параметра a парабола смещается вдоль оси ординат.



Видно, что при $a < 0$ графики функций y_1 и y_2 не имеют общих точек и данное уравнение корней не имеет (парабола *а*).

При $a = 0$ графики функций y_1 и y_2 имеют одну общую точку – начало координат (случай *б*). Поэтому уравнение имеет единственный корень (а именно $x = 0$).

При $a > 0$ графики функций y_1 и y_2 пересекаются в двух точках (парабола *в*) и данное уравнение имеет два корня.

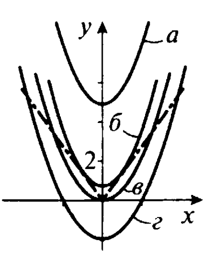
Итак, уравнение при $a < 0$ корней не имеет, при $a = 0$ имеет один корень, при $a > 0$ – два корня.

Рассмотрим похожую (но более сложную) задачу.

Пример 7

При различных значениях параметра a определите число корней уравнения $x^2 - |x| + a = 0$.

Данное уравнение запишем в виде $x^2 + a = |x|$. Построим графики функций $y_1 = x^2 + a$ и $y_2 = |x|$. График функции y_2 не зависит от параметра a. График функции y_1 представляет собой параболу, вершина которой имеет координаты $(0; a)$. С уменьшением параметра a парабола смещается вниз.



При достаточно больших значениях a графики y_1 и y_2 не имеют общих точек (случай *а*). Уравнение при этом решений не имеет. При уменьшении параметра a парабола спускается вниз и касается графика y_2 в двух точках (случай *б*). Тогда уравнение имеет два корня. При дальнейшем уменьшении a парабола пересекает каждую ветвь графика y_2 в двух точках (этот случай на рисунке не изображен). При этом уравнение имеет четыре корня. При $a = 0$ парабола расположена еще ниже и пересекает график y_2 в трех точках (случай *в*). Тогда уравнение имеет три корня. При дальнейшем уменьшении a (т. е. при $a < 0$) парабола пересекает график y_2 в двух точках (случай *г*) и уравнение имеет два корня.

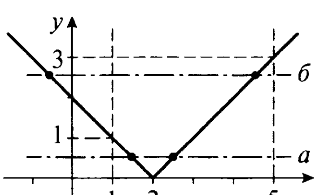
Определим, при каком значении параметра a реализуется случай *б*. Так как графики функций y_1 и y_2 симметричны относительно оси ординат, то достаточно рассмотреть случай $x \geq 0$. Для таких значений x по определению $|x| = x$ и данное уравнение имеет вид $x^2 - x + a = 0$. Так как в рассматриваемом случае в области $x \geq 0$ уравнение имеет один корень, то дискриминант уравнения $D = 1 - 4a = 0$, откуда $a = \frac{1}{4}$.

Итак, опишем полученные результаты: при $a < 0$ или $a = \frac{1}{4}$ 2 корня, при $a = 0$ 3 корня, при $0 < a < \frac{1}{4}$ 4 корня, при $a > \frac{1}{4}$ нет корней.

С помощью графиков можно исследовать расположение корней уравнения.

Пример 8

При каких значениях параметра a хотя бы один из корней уравнения $|x - 2| = a$ удовлетворяет условию $1 \leq x \leq 5$?



Построим графики функций $y_1 = |x - 2|$ (ломаная линия) и $y_2 = a$ (горизонтальная прямая a). Используя уравнение $|x - 2| = a$, найдем: при $x = 1$ $a = 1$, при $x = 5$ $a = 3$.

Из рисунка видно, что при $a = 0$ данное уравнение имеет единственный корень $x = 2$, который удовлетворяет условию $1 \leq x \leq 5$.

Для $a > 0$ уравнение имеет два корня. Для $0 < a \le 1$ эти корни удовлетворяют условию $1 \le x \le 5$ (случай *а*). Для $1 < a \le 5$ такому условию удовлетворяет только один корень данного уравнения (случай *б*).

Итак, при $0 \le a \le 5$ хотя бы один корень уравнения $|x - 2| = a$ удовлетворяет условию $1 \le x \le 5$.

IV. Задания на уроках

№ 640; 641 (а); 643; 644 (б); 645 (а, в); 646; 649.

V. Творческие задания

1. Графически решите уравнение:

а) $x^2 = |x + 1|$; б) $x^2 = |x - 2|$; в) $\frac{2}{x} = |x - 1|$; г) $|x + 1| = \frac{2}{x}$; д) $x^3 = |x - 2|$; е) $-x^3 = |x - 6|$; ж) $3 - |x| = |x - 1|$; з) $5 - |x| = |x + 3|$; и) $|x| - 1 = |x - 3|$; к) $|x| - 3 = |x + 5|$; л) $|x| - |x + 2| = 3$; м) $|x + 3| - |x| = 5$.

Ответы: а) $x_1 = -0,6$ и $x_2 = 1,6$; б) $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$; в) $x = 2$; г) $x = 1$; д) $x = 1$; е) $x = -2$; ж) $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$; з) $x_1 = -4$ и $x_2 = 1$; и) $x = 2$; к) $x = -4$; л, м) корней нет.

2. Определите число корней уравнения:

а) $|x - 3| = x + a$; б) $|x + 2| = x + a$; в) $|x| + |x + 2| = a$; г) $|x| + |x - 3| = a$; д) $|x| - |x - 1| = a$; е) $|x + 3| - |x| = a$; ж) $\frac{1}{x} = |x| + a$; з) $\frac{1}{|x|} = x + a$.

Ответы: а) при $a < -3$ корней нет, при $a = -3$ бесконечно много корней, при $a > -3$ 1 корень; б) при $a < 2$ корней нет, при $a = 2$ бесконечно много корней, при $a > 2$ 1 корень; в) при $a < 2$ корней нет, при $a = 2$ бесконечно много корней, при $a > 2$ 2 корня; г) при $a < 3$ корней нет, при $a = 3$ бесконечно много корней, при $a > 3$ 2 корня; д) при $a < -1$ или $a > 1$ корней нет, при $a = -1$ или $a = 1$ бесконечно много корней, при $1 < a < -1$ 1 корень; е) при $a < -3$ или $a > 3$ корней нет, при $a = -3$ или $a = 3$ бесконечно много корней, при $-3 < a < 3$ 1 корень; ж) при $a < -2$ 3 корня, при $a = -2$ 2 корня, при $a > -2$ 1 корень; з) при $a < 2$ 1 корень, при $a = 2$ 2 корня, при $a > 2$ 3 корня.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 641 (б); 642; 644 (а); 645 (б, г); 647; 648.

Урок 63. Контрольная работа № 6 по теме «Квадратные уравнения. Дробные рациональные уравнения»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 самые простые, варианты 3, 4 сложнее и варианты 5, 6 самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую свободу выбора учащимся. При таких же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла, вариантов 5, 6 – 1 балл (т. е. оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач).

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимися (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Решите уравнение $\dfrac{x^2-3x+2}{x+4}=0$.

2. Решите уравнение $\dfrac{10}{2x-3}=x-1$.

3. Решите уравнение $\dfrac{x-6}{x^2-36}=0$.

4. Найдите сумму и произведение корней уравнения $3x^2 + 5x - 1 = 0$.

5. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y=\dfrac{1}{x}$ и $y = 2 - x$.

6. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2-4}{x+a}=0$ имеет единственное решение?

Вариант 2

1. Решите уравнение $\dfrac{x^2-4x+3}{x+2}=0.$

2. Решите уравнение $\dfrac{15}{6x-1}=x+2.$

3. Решите уравнение $\dfrac{x+7}{x^2-49}=0.$

4. Найдите сумму и произведение корней уравнения $2x^2+3x-1=0.$

5. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y=\dfrac{2}{x}$ и $y=x-1.$

6. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2-9}{x-a}=0$ имеет единственное решение?

Вариант 3

1. Решите уравнение $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}=0.$

2. Решите уравнение $\dfrac{9}{x-1}=2x-5.$

3. Решите уравнение $\dfrac{|x|-3}{x^2-9}=0.$

4. Уравнение $3x^2+5x-1=0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите величину $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}.$

5. Числитель обыкновенной несократимой дроби на 2 меньше знаменателя. Если к числителю и знаменателю прибавить 2, то дробь увеличится на $\dfrac{8}{15}$. Найдите эту дробь.

6. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2+3x-4}{x-a}=0$ имеет два решения?

Вариант 4

1. Решите уравнение $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+x-2}=0.$

2. Решите уравнение $\dfrac{10}{x-1}=2x-1.$

3. Решите уравнение $\dfrac{|x|-4}{x^2-16}=0$.

4. Уравнение $2x^2+3x-1=0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите величину $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$.

5. Числитель обыкновенной несократимой дроби на 3 меньше знаменателя. Если к числителю и знаменателю прибавить 1, то дробь увеличится на $\dfrac{3}{20}$. Найдите эту дробь.

6. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2-x-6}{x+a}=0$ имеет два решения?

Вариант 5

1. Решите уравнение $\dfrac{7x-6}{x^3+27}=\dfrac{1}{x^2-3x+9}-\dfrac{1}{x+3}$.

2. Решите уравнение $\dfrac{|x+1|-3}{x^2-x-2}=0$.

3. Мастер тратит на всю работу на 3 дня меньше, чем ученик, и на один день больше, чем при работе вместе с учеником. За сколько дней сделает всю работу мастер, работая один?

4. Решите уравнение $x^2+3x=\dfrac{8}{x^2+3x-2}$.

5. При всех значениях параметра a решите уравнение $\dfrac{x^2-3x+2}{x+a}=0$.

6. Решите уравнение с двумя неизвестными $x^2+4y^2=6x-4y-10$.

Вариант 6

1. Решите уравнение $\dfrac{x-14}{x^3-8}=\dfrac{5}{x^2+2x+4}-\dfrac{1}{x-2}$.

2. Решите уравнение $\dfrac{|x+1|-2}{x^2+x-2}=0$.

3. Первая бригада выполняет работу на 3 ч дольше, чем вторая бригада, выполняющая ту же работу, и на 4 ч дольше, чем при работе вместе со второй бригадой. За сколько часов выполняет работу одна первая бригада?

4. Решите уравнение $x^2+x+1=\dfrac{15}{x^2+x+3}$.

5. При всех значениях параметра a решите уравнение $\dfrac{x^2-4x+3}{x-a}=0$.

6. Решите уравнение с двумя неизвестными $4x^2 + y^2 = 4x - 4y - 5$.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ (число решивших задачу правильно или почти правильно);
± (число решивших задачу со значительными погрешностями);
– (число не решивших задачу);
∅ (число не решавших задачу).

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими их).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям и разобрать наиболее трудные варианты).

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.
2. $x_1 = -1$ и $x_2 = 3{,}5$.
3. Решений нет.
4. $x_1 + x_2 = -\frac{5}{3}$, $x_1x_2 = -\frac{1}{3}$.
5. (1; 1).
6. При $a = \pm 2$.

Вариант 2

1. $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$.
2. $x_1 = 1$ и $x_2 = -\frac{17}{6}$.
3. Решений нет.
4. $x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_1x_2 = -\frac{1}{2}$.
5. (–1; –2).
6. При $a = \pm 3$.

Вариант 3

1. $x = -3$.
2. $x_1 = 4$ и $x_2 = -0{,}5$.
3. Решений нет.
4. 31.
5. $\frac{1}{3}$.
6. При всех a, кроме $a = 1$ и $a = -4$.

Вариант 4

1. $x = -4$.
2. $x_1 = 3$ и $x_2 = -1{,}5$.
3. Решений нет.
4. 13.
5. $\frac{1}{4}$.
6. При всех a, кроме $a = 3$ и $a = -2$.

Вариант 5

1. В правой части уравнения приведем дроби к общему знаменателю и упростим ее. Получаем $\frac{7x-6}{x^3+27}=\frac{1}{x^2-3x+9}-\frac{1}{x+3}$

или $\frac{7x-6}{x^3+27}=\frac{x+3-x^2+3x-9}{(x+3)\left(x^2-3x+9\right)}$, или $\frac{7x-6}{x^3+27}=\frac{-x^2+4x-6}{(x+3)\left(x^2-3x+9\right)}$.

Обе части уравнения определены при $x \neq -3$ и равны. Так как дроби и их знаменатели равны, то равны и числители. Имеем $7x-6=-x^2+4x-6$, или $x^2+3x=0$, или $x(x+3)=0$. Корни этого уравнения $x_1=0$ и $x_2=-3$. Условию $x \neq -3$ удовлетворяет только корень $x=0$, который и является решением данного уравнения.

Ответ: $x=0$.

2. Разложим знаменатель дроби на множители и получим $\frac{|x+1|-3}{x^2-x-2}=0$, или $\frac{|x+1|-3}{(x+1)(x-2)}=0$. Допустимые значения переменной $x \neq -1$ и $x \neq 2$. Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Получаем уравнение $|x+1|-3=0$, или $|x+1|=3$, или $x+1=\pm 3$, откуда $x_1=2$ и $x_2=-4$. Учитывая ограничения на x, корнем данного уравнения будет $x=-4$.

Ответ: $x=-4$.

3. Пусть мастер тратит на работу x (дней), тогда ученик — $(x+3)$ (дня). Примем работу за единицу. За один день мастер делает $\frac{1}{x}$ (часть работы), ученик — $\frac{1}{x+3}$ (часть). Вместе за один день мастер и ученик выполняют $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{2x+3}{x(x+3)}$ (часть работы) и сделают ее за $1:\frac{2x+3}{x(x+3)}=\frac{x(x+3)}{2x+3}$ (дней). Так как мастер тратит на работу на один день больше при работе вместе с учеником, то получаем уравнение $x=\frac{x(x+3)}{2x+3}+1$. Умножим все члены на $2x+3$. Имеем $x(2x+3)=x(x+3)+2x+3$, или $2x^2+3x=x^2+3x+2x+3$, или $x^2-2x-3=0$. Корни этого уравнения $x_1=3$ и $x_2=-1$ (не подходит).

Ответ: 3 дня.

4. Для решения уравнения $x^2+3x=\frac{8}{x^2+3x-2}$ введем новую переменную $y=x^2+3x$ и получим уравнение $y=\frac{8}{y-2}$, или

$y^2 - 2y - 8 = 0$ (где $y \neq 2$). Корни этого уравнения $y_1 = -2$ и $y_2 = 4$. Теперь вернемся к старой переменной и получим уравнения:

а) $x^2 + 3x = -2$, или $x^2 + 3x + 2 = 0$. Его корни $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$;

б) $x^2 + 3x = 4$, или $x^2 + 3x - 4 = 0$. Его корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -4$.

Итак, данное уравнение имеет четыре корня.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -4$.

5. Разложим числитель дроби на множители и запишем уравнение в виде $\frac{(x-1)(x-2)}{x+a} = 0$. Дробь равна нулю, если ее числитель $(x - 1)(x - 2) = 0$, а знаменатель $x + a \neq 0$ (т. е. $a \neq -x$). Корни уравнения $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Поэтому если $a \neq -1$ и $a \neq -2$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Если $a = -1$, то остается только один корень – $x = 2$ (корень $x = 1$ решением данного уравнения не является). Если $a = -2$, то остается только один корень – $x = 1$ (корень $x = 2$ решением данного уравнения не является).

Ответ: при $a \neq -1$, $a \neq -2$ $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$; при $a = -1$ $x = 2$; при $a = -2$ $x = 1$.

6. Для решения уравнения $x^2 + 4y^2 = 6x - 4y - 10$ перенесем все члены в левую часть: $x^2 + 4y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$ – и выделим полные квадраты по переменным x и y. Получаем: $(x^2 - 6x + 9) + (4y^2 + 4y + 1) = 0$, или $(x - 3)^2 + (2y + 1)^2 = 0$. Так как каждое слагаемое $(x - 3)^2$ и $(2y + 1)^2$ неотрицательно, то их сумма равна нулю только при условии, что каждое из них равно нулю. Получаем систему линейных уравнений $\begin{cases} x - 3 = 0, \\ 2y + 1 = 0, \end{cases}$ откуда $x = 3$, $y = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $x = 3$, $y = -\frac{1}{2}$.

Вариант 6

1. В правой части уравнения приведем дроби к общему знаменателю и упростим ее. Получаем $\frac{x-14}{x^3-8} = \frac{5}{x^2+2x+4} - \frac{1}{x-2}$, или $\frac{x-14}{x^3-8} = \frac{5(x-2)-x^2-2x-4}{(x-2)(x^2+2x+4)}$, или $\frac{x-14}{x^3-8} = \frac{-x^2+3x-14}{(x-2)(x^2+2x+4)}$.

Обе части уравнения определены при $x \neq 2$ и равны. Так как дроби и их знаменатели равны, то равны и числители. Имеем $x - 14 = -x^2 + 3x - 14$, или $x^2 - 2x = 0$, или $x(x - 2) = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Условию $x \neq 2$ удовлетворяет только корень $x = 0$, который и является решением данного уравнения.

Ответ: $x = 0$.

2. Разложим знаменатель дроби на множители и получим: $\frac{|x+1|-2}{x^2+x-2}=0$, или $\frac{|x+1|-2}{(x+2)(x-1)}=0$. Допустимые значения переменной $x \neq -2$ и $x \neq 1$. Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Получаем уравнение $|x+1|-2=0$, или $|x+1|=2$, или $x+1=\pm 2$, откуда $x_1=1$ и $x_2=-3$. Учитывая ограничения на x, корнем данного уравнения будет $x=-3$.

Ответ: $x=-3$.

3. Пусть первая бригада тратит на работу x (ч), тогда вторая бригада – $(x-3)$ (ч). Примем работу за единицу. За один час первая бригада делает $\frac{1}{x}$ (часть работы), вторая бригада – $\frac{1}{x-3}$ (часть работы). Вместе за один час обе бригады выполняют $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}=\frac{2x-3}{x(x-3)}$ (часть работы) и сделают ее за $1:\frac{2x-3}{x(x-3)}=\frac{x(x-3)}{2x-3}$ (ч). Так как первая бригада тратит на работу на 4 ч больше, чем при совместной работе со второй бригадой, то получаем уравнение $x=\frac{x(x-3)}{2x-3}+4$. Умножим все члены на $2x-3$. Имеем $x(2x-3)=x(x-3)+4(2x-3)$, или $2x^2-3x=x^2-3x+8x-12$, или $x^2-8x+12=0$. Корни этого уравнения $x_1=2$ и $x_2=6$. Корень $x=2$ не подходит, так как $x>3$.

Ответ: 6 ч.

4. Для решения уравнения $x^2+x+1=\frac{15}{x^2+x+3}$ введем новую переменную $y=x^2+x$ и получим уравнение $y+1=\frac{15}{y+3}$, или $(y+1)(y+3)=15$, или $y^2+4y-12=0$ (где $y \neq -3$). Корни этого уравнения $y_1=-6$ и $y_2=2$. Теперь вернемся к старой переменной и получим уравнения:

а) $x^2+x=-6$, или $x^2+x+6=0$. Это уравнение корней не имеет;

б) $x^2+x=2$, или $x^2+x-2=0$. Его корни $x_1=1$ и $x_2=-2$.

Итак, данное уравнение имеет два корня.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=-2$.

5. Разложим числитель дроби на множители и запишем уравнение в виде $\frac{(x-1)(x-3)}{x-a}=0$. Дробь равна нулю, если ее числи-

тель $(x-1)(x-3)=0$, а знаменатель $x-a\neq 0$ (т. е. $a\neq x$). Корни уравнения $x_1=1$ и $x_2=3$. Поэтому если $a\neq 1$ и $a\neq 3$, то уравнение имеет два корня: $x_1=1$ и $x_2=3$. Если $a=1$, то остается только один корень — $x=3$ (корень $x=1$ решением данного уравнения не является). Если $a=3$, то остается только один корень — $x=1$ (корень $x=3$ решением данного уравнения не является).

Ответ: при $a\neq 1$, $a\neq 3$ $x_1=1$ и $x_2=3$; при $a=1$ $x=3$; при $a=3$ $x=1$.

6. Для решения уравнения $4x^2+y^2=4x-4y-5$ перенесем все члены в левую часть: $4x^2+y^2-4x+4y+5=0$ — и выделим полные квадраты по переменным x и y. Получаем: $(4x^2-4x+{}$ $+1)+(y^2+4y+4)=0$ или $(2x-1)^2+(y+2)^2=0$. Так как каждое слагаемое $(2x-1)^2$ и $(y+2)^2$ неотрицательно, то их сумма равна нулю только при условии, что каждое из них равно нулю. Получаем систему линейных уравнений $\begin{cases}2x-1=0,\\ y+2=0,\end{cases}$ откуда $x=\frac{1}{2}$, $y=-2$.

Ответ: $x=\frac{1}{2}$, $y=-2$.

VI. Подведение итогов урока

Факультативный урок. Решение некоторых уравнений высоких степеней и дробно-рациональных уравнений

Цель: научить использовать замену переменной при решении уравнений высоких степеней и дробных рациональных уравнений.

Планируемые результаты: научиться решать уравнения с помощью замены переменной.

Тип урока: урок-исследование.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

План урока

1. Уравнения высоких степеней.
2. Рациональные уравнения.

1. Уравнения высоких степеней

Многие уравнения высоких степеней и дробные рациональные уравнения решают с помощью *замены переменной*. Рассмотрим наиболее типичные уравнения.

Пример 1

Решим уравнение $(x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) + 3 = 0$.

Очевидно, что при использовании формулы квадрата разности выражение $(x^2 - 2x)^2$ дает многочлен четвертой степени. Поэтому данное уравнение является уравнением четвертой степени. Общие способы решения уравнений высоких степеней (третьей, четвертой и т. д.) в школе не изучают.

Обратим внимание на то, что неизвестная входит в уравнение только в виде выражения $x^2 - 2x$. Поэтому обозначим это выражение новой переменной y, т. е. $y = x^2 - 2x$. Тогда данное уравнение имеет вид $y^2 - 4y + 3 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = 1$ и $y_2 = 3$. Вернемся теперь к старой неизвестной x. Получаем два квадратных уравнения:

а) $x^2 - 2x = 1$, или $x^2 - 2x - 1 = 0$. Корни этого уравнения $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$;

б) $x^2 - 2x = 3$, или $x^2 - 2x - 3 = 0$. Корни этого уравнения $x_3 = -1$ и $x_4 = 3$.

Итак, данное уравнение имеет четыре корня.

Пример 2

Решим уравнение $(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x + 1) = 48$.

Данное уравнение также является уравнением четвертой степени. Неизвестная x входит в уравнение в виде выражения $x^2 + 4x$. Поэтому такое выражение можно принять в качестве новой переменной. Однако более удобно ввести переменную, равную полусумме выражений $x^2 + 4x + 3$ и $x^2 + 4x + 1$, т. е. $y = x^2 + 4x + 2$. Тогда $x^2 + 4x + 3 = y + 1$ и $x^2 + 4x + 1 = y - 1$. Поэтому уравнение имеет вид $(y + 1)(y - 1) = 48$ и сводится к неполному квадратному уравнению $y^2 - 1 = 48$, или $y^2 - 49 = 0$, или $(y + 7)(y - 7) = 0$. Корни этого уравнения $y_{1,2} = \pm 7$. Вернемся к старой неизвестной x и получим два квадратных уравнения:

а) $x^2 + 4x + 2 = 7$, или $x^2 + 4x - 5 = 0$. Его корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -5$;

б) $x^2 + 4x + 2 = -7$, или $x^2 + 4x + 9 = 0$. Дискриминант этого уравнения отрицательный, и оно корней не имеет.

Итак, данное уравнение имеет два корня.

Пример 3

Решим уравнение $(x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 5) = 105$.

Данное уравнение также имеет четвертую степень. Для его решения надо изменить порядок умножения: $((x - 1)(x + 5)) \cdot ((x + 1)(x + 3)) = 105$ — и заметить, что $(x - 1)(x + 5) = x^2 + 4x - 5$ и $(x + 1)(x + 3) = x^2 + 4x + 3$. Тогда уравнение имеет вид $(x^2 + 4x - 5) \cdot (x^2 + 4x + 3) = 105$. Вид этого уравнения аналогичен виду уравнения из примера 2. Поэтому введем новую переменную $y = x^2 + 4x - 1$. Уравнение принимает вид $(y - 4)(y + 4) = 105$, или $y^2 - 16 = 105$, или $y^2 = 121$. Корни этого неполного квадратного уравнения $y_{1,2} = \pm 11$. Вернемся к старой неизвестной и получим два квадратных уравнения:

а) $x^2 + 4x - 1 = 11$, или $x^2 + 4x - 12 = 0$. Его корни $x_1 = -6$ и $x_2 = 2$;

б) $x^2 + 4x - 1 = -11$, или $x^2 + 4x + 10 = 0$. Это уравнение корней не имеет.

Итак, данное уравнение имеет два корня: $x_1 = -6$ и $x_2 = 2$.

Пример 4

Решим уравнение $(x^2 + 3x - 8)^2 + 2x(x^2 + 3x - 8) - 3x^2 = 0$.

Многочлен, стоящий в левой части уравнения, легко свести к однородному многочлену двух переменных, если ввести новую переменную $y = x^2 + 3x - 8$. Тогда уравнение принимает вид $y^2 + 2xy - 3x^2 = 0$. Решим это однородное уравнение, считая, что переменная y — неизвестное, а переменная x — постоянная величина. Дискриминант этого квадратного уравнения $D = (-x)^2 - 1 \cdot (-3x^2) = 4x^2$ и $y_{1,2} = -x \pm 2x$, т. е. $y_1 = x$ и $y_2 = -3x$. Вернемся к старой неизвестной x и получим два квадратных уравнения:

а) $x^2 + 3x - 8 = x$, или $x^2 + 2x - 8 = 0$. Его корни $x_1 = -4$ и $x_2 = 2$;

б) $x^2 + 3x - 8 = -3x$, или $x^2 + 6x - 8 = 0$. Его корни $x_{3,4} = -3 \pm \sqrt{17}$.

Пример 5

Решим уравнение $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0$.

Отличительной особенностью этого уравнения является попарное равенство коэффициентов при неизвестной в различных степенях относительно среднего члена уравнения $-4x^2$ (коэффициент при x^4 и свободный член равны 2, коэффициенты при x^3 и x равны 3 и -3 соответственно). Очередность следования коэффициентов: 2, 3, -4, -3, 2. Поэтому такие уравнения называются *возвратными* (коэффициенты уравнения как бы возвращаются вновь), или *симметричными* (коэффициенты симметричны относительно среднего коэффициента). Легко проверить, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения. Так как степень уравнения четвертая, то разделим все его члены на x в степени вполовину меньше, т. е. на x^2 (при этом $x^2 \neq 0$). Получаем уравнение $2x^2 + 3x - 4 - 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$.

В этом уравнении сгруппируем члены с одинаковыми коэффициентами: $\left(2x^2 + 2 \cdot \frac{1}{x^2}\right) + \left(3x - 3 \cdot \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$, или $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$. Введем новую неизвестную $y = x - \frac{1}{x}$. Теперь необходимо выразить выражение $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ через переменную y. Для этого возведем в квадрат обе части равенства $y=x-\dfrac{1}{x}$ и получим $y^2=x^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$, откуда $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2+2$. Тогда уравнение принимает вид $2(y^2+2)+3y-4=0$, или $2y^2+3y=0$, или $y(2y+3)=0$. Корни этого неполного квадратного уравнения $y_1=0$ и $y_2=-\dfrac{3}{2}$. Вернемся к старой неизвестной x и получим два рациональных уравнения:

а) $x-\dfrac{1}{x}=0$, или $x^2-1=0$. Корни этого неполного квадратного уравнения $x_{1,2}=\pm1$;

б) $x-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{3}{2}$, или $2x^2+3x-2=0$. Корни этого квадратного уравнения $x_3=-2$ и $x_4=\dfrac{1}{2}$.

Итак, данное уравнение имеет четыре корня.

2. Рациональные уравнения

Теперь остановимся на некоторых типичных дробных рациональных уравнениях.

Пример 6

Решим уравнение $\dfrac{x^2-2x}{4x-3}+5=-\dfrac{16x-12}{2x-x^2}$.

Преобразуем данное уравнение и запишем его в виде $\dfrac{x^2-2x}{4x-3}+5=-4\cdot\dfrac{4x-3}{x^2-2x}$. Видно, что неизвестная x входит в уравнение в виде дроби $\dfrac{x^2-2x}{4x-3}$ или обратной дроби $\dfrac{4x-3}{x^2-2x}$. Поэтому введем новую неизвестную $y=\dfrac{x^2-2x}{4x-3}$ и получим уравнение $y+5=-4\cdot\dfrac{1}{y}$, или $y^2+5y+4=0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1=-1$ и $y_2=-4$. Вернемся к старой неизвестной x и получим два рациональных уравнения:

а) $\dfrac{4x-3}{x^2-2x}=-1$, или $4x-3=-x^2+2x$, или $x^2+2x-3=0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1=1$ и $x_2=-3$;

б) $\frac{4x-3}{x^2-2x} = -4$ или $4x - 3 = -4x^2 + 8x$, или $4x^2 - 4x - 3 = 0$.

Корни этого квадратного уравнения $x_3 = -\frac{1}{2}$ и $x_4 = \frac{3}{2}$.

Итак, данное уравнение имеет четыре корня.

Пример 7

Решим уравнение $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{7}{6}$.

Так как неизвестная x входит в уравнение только в виде выражения $x^2 + 2x$, то введем новую неизвестную $y = x^2 + 2x + 2$ (это более удобно). Тогда уравнение имеет вид $\frac{y-1}{y} + \frac{y}{y+1} = \frac{7}{6}$.

Умножим все члены уравнения на общий знаменатель дробей $6y(y + 1)$ и получим: $6(y - 1)(y + 1) + 6y \cdot y = 7y(y + 1)$, или $6y^2 - 6 + 6y^2 = 7y^2 + 7y$, или $5y^2 - 7y - 6 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = 2$ и $y_2 = -\frac{3}{5}$. Вернемся к старой неизвестной x и получим два квадратных уравнения:

а) $x^2 + 2x + 2 = 2$, или $x^2 + 2x = 0$. Корни этого неполного квадратного уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = -2$;

б) $x^2 + 2x + 2 = -\frac{3}{5}$, или $x^2 + 2x + \frac{13}{5} = 0$. Это квадратное уравнение корней не имеет.

Итак, данное уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = -2$.

Пример 8

Решим уравнение $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \frac{3x}{x^2-8x+15}$.

В данном уравнении замена неизвестной не столь очевидна, как в предыдущем. Однако можно заметить, что повторяется выражение $x^2 + 15$. Поэтому введем новую переменную $y = x^2 + 15$. Тогда данное уравнение имеет вид $\frac{y-10x}{y-6x} = \frac{3x}{y-8x}$, или $(y - 10x)(y - 8x) = 3x(y - 6x)$, или $y^2 - 18xy + 80x^2 = 3xy - 18x^2$, или $y^2 - 21xy + 98x^2 = 0$. Решая это однородное уравнение, найдем: $y = 7x$ и $y = 14x$. Вернемся к старой неизвестной x и получим два квадратных уравнения:

а) $x^2 + 15 = 7x$, или $x^2 - 7x + 15 = 0$. Это квадратное уравнение корней не имеет;

б) $x^2 + 15 = 14x$, или $x^2 - 14x + 15 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{34}$.

Итак, данное уравнение имеет два корня.

III. Задания на уроке и на дом

Решите уравнение:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
2) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$;
3) $(x^2 - 16x)^2 - 2(x^2 - 16x) = 63$;
4) $(x^2 + 4x)^2 - 4(x^2 + 4x) - 5 = 0$;
5) $(x - 1)^4 - x^2 + 2x - 73 = 0$;
6) $(x + 2)^4 + 2x^2 + 8x - 16 = 0$;
7) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$;
8) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 1$;
9) $x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 15$;
10) $(x - 2)(x + 1)(x + 4)(x + 7) = 19$;
11) $x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} = 4$;
12) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$;
13) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = 5$;
14) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 10\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}\right)$;
15) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = 0$;
16) $(x^2 - x + 1)^2 + 7x(x^2 - x + 1) + 12x^2 = 0$;
17) $\dfrac{x-2}{x^2} = 2x - x^2$;
18) $\dfrac{(x-3)(x+1)}{x^2} = 2x - 6$;
19) $\dfrac{x^2+4x}{7x-2} - \dfrac{12-42x}{x^2+4x} = 7$;
20) $\left(\dfrac{4x-5}{3x+2}\right)^2 + \left(\dfrac{3x+2}{4x-5}\right)^2 = 4{,}25$;
21) $\dfrac{x^2-6x-9}{x} = \dfrac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}$;
22) $\dfrac{x^2+8x-4}{2x} = \dfrac{x^2+16x-4}{x^2+4x-4}$.

Ответы: 1) ±1; ±2; 2) $\pm\sqrt{3}$; 3) $8 \pm \sqrt{73}$; $8 \pm \sqrt{57}$; 4) -5; 1; $-2 \pm \sqrt{5}$; 5) -2; 4; 6) -4; 0; 7) -2; 1; 8) 2; 3; 9) $\dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$; 10) $\dfrac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{-5 \pm \sqrt{85}}{2}$; 11) 1; $\dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$; 12) $\dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$; 13) $-\dfrac{1}{2}$; 2; $-1 \pm \sqrt{2}$; 14) -2;

6; $3 \pm \sqrt{21}$; 15) –4; –2; 16) –1; $-2 \pm \sqrt{3}$; 17) –1; 2; 18) $-\frac{1}{2}$; 1; 3; 19) 1; 2; $19 \pm \sqrt{349}$; 20) –4,5; 0,1; 2,4; $\frac{8}{11}$; 21) $\frac{5 \pm \sqrt{61}}{2}$; –1; 9; 22) ±2; $-5 \pm \sqrt{29}$.

IV. Подведение итогов урока

Факультативный урок. Зачетная работа по теме «Квадратные уравнения»

Цель: проверить знания учащихся по теме.

Планируемые результаты: контроль усвоения основных понятий и навыков.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика зачетной работы

По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно, у учащихся появляется свобода выбора задач. Все задания разбиты на три блока: А, В и С. Самые простые задачи находятся в блоке А, более сложные – в блоке В, еще сложнее – в блоке С. Каждая задача из блока А оценивается в 1 балл, из блока В – в 2 балла, из блока С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий отдельное занятие можно и не посвящать (решения задач можно вывесить на стенде). Для этого приводится разбор заданий.

III. Зачетная работа

А

1. Решите уравнение $2x^2 - 6 = 0$.
2. Решите уравнение $3x^2 + 5x = 0$.
3. Решите уравнение $-7x^2 = 0$.
4. Решите уравнение $3x^2 - x - 2 = 0$.
5. Графически решите уравнение $x^2 = x + 1$.

6. Турист проехал на моторной лодке 25 км вверх по реке, а обратно спустился на плоту. На лодке он плыл на 10 ч меньше, чем на плоту. Найдите скорость течения, если скорость лодки в стоячей воде 12 км/ч.

7. Уравнение $2x^2 + 5x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите значение выражения $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$.

B

8. Решите уравнение $2x^2 - 1999x + 1997 = 0$.

9. Решите уравнение $4x^2 - 7ax + 3a^2 = 0$.

10. Уравнение $3x^2 + 5x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите значение выражения $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$.

11. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 8x + a = 0$ и $3x_1 + 4x_2 = 29$. Найдите значение a и корни уравнения.

C

12. Решите уравнение $(a-3)x^2 + ax - 2a + 3 = 0$.

13. Решите уравнение $\frac{x+3a}{x+a} - \frac{x+a}{x-a} = \frac{2a-3a^2}{x^2-a^2}$.

14. Аналитически и графически решите уравнение $|x-1| = x^2$.

IV. Разбор заданий

1. Уравнение $2x^2 - 6 = 0$ запишем в виде $2x^2 = 6$. Разделим обе части уравнения на число 2 (не равное нулю) и получим $x^2 = 3$. Корни этого уравнения $x_1 = -\sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{3}$.

Ответ: $-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$.

2. Левую часть уравнения $3x^2 + 5x = 0$ разложим на множители и получим $x(3x + 5) = 0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем $x_1 = 0$ или $3x + 5 = 0$ (корень этого линейного уравнения), $x_2 = -\frac{5}{3}$.

Ответ: 0 и $-\frac{5}{3}$.

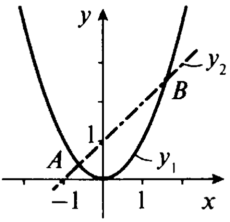
3. Разделим обе части уравнения $-7x^2 = 0$ на число -7 (не равное нулю) и получим $x^2 = 0$. Это уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

Ответ: 0.

4. Найдем дискриминант квадратного уравнения $3x^2 - x - 2 = 0$: $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25$. Теперь находим корни уравнения: $x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{6}$, т. е. $x_1 = \frac{6}{6} = 1$ и $x_2 = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$.

Ответ: 1 и $-\frac{2}{3}$.

5. Построим графики функций $y_1 = x^2$ (парабола) и $y_2 = x + 1$ (прямая).



Видно, что графики пересекаются в двух точках: A и B. Абсциссы этих точек дают решение уравнения $x^2 = x + 1$. Приближенно корни равны $x_1 \approx -0{,}6$ и $x_2 \approx 1{,}6$.

Ответ: $-0{,}6$ и $1{,}6$.

6. Пусть скорость течения реки x (км/ч). Тогда скорость лодки против течения реки $12 - x$ (км/ч) и на 25 км турист затратит $\frac{25}{12-x}$ (ч). Плот, очевидно, движется со скоростью течения реки x км/ч и проходит 25 км за $\frac{25}{x}$ (ч). По условию на движение на лодке было затрачено на 10 ч меньше, чем на движение на плоту. Поэтому получаем дробное рациональное уравнение $\frac{25}{x} - \frac{25}{12-x} = 10.$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей и получим: $25(12 - x) - 25x = 10x(12 - x)$, или $5(12 - x) - 5x = 2x(12 - x)$. Раскроем скобки и приведем подобные члены: $60 - 5x - 5x = 24x - 2x^2$, или $2x^2 - 34x + 60 = 0$, или $x^2 - 17x + 30 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 2$ и $x_2 = 15$ (не подходит, так как $x < 12$).

Ответ: 2 км/ч.

7. Для квадратного уравнения $2x^2 + 5x + 1 = 0$ запишем теорему Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$ и $x_1x_2 = \frac{1}{2}$. Найдем значение данного выражения: $x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = x_1x_2(x_2 + x_1) = x_1x_2(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{4}$.

Ответ: $-\frac{5}{4}$.

8. Один корень уравнения $2x^2 - 1999x + 1997 = 0$ легко угадать: $x_1 = 1$. Проверим, подставив это значение: $2 \cdot 1^2 - 1999 \cdot 1 + 1997 = 0$ (верное равенство). Для нахождения второго корня

запишем теорему Виета для произведения корней: $x_1x_2 = \frac{1997}{2}$, откуда $x_2 = \frac{1997}{2x_1} = \frac{1997}{2}$. Легко проверить, что найденные корни x_1 и x_2 удовлетворяют теореме Виета для суммы корней: $x_1 + x_2 = 1 + \frac{1997}{2} = \frac{1999}{2}$.

Ответ: 1 и $\frac{1997}{2}$.

9. Для квадратного уравнения $4x^2 - 7ax + 3a^2 = 0$ найдем дискриминант: $D = (-7a)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3a^2 = a^2$ — и корни: $x_{1,2} = \frac{7a \pm a}{8}$, т. е. $x_1 = \frac{8a}{8} = a$ и $x_2 = \frac{6a}{8} = \frac{3}{4}a$.

Ответ: a и $\frac{3}{4}a$.

10. Преобразуем данное выражение: $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1x_2)^2}$. Для квадратного уравнения $3x^2 + 5x + 1 = 0$ запишем теорему Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{5}{3}$ и $x_1x_2 = \frac{1}{3}$. Найдем сумму квадратов корней: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{25}{9} - \frac{2}{3} = \frac{19}{9}$ — и значение данного выражения: $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{19/9}{(1/3)^2} = 19$.

Ответ: 19.

11. Для квадратного уравнения $x^2 - 8x + a = 0$ запишем теорему Виета: $x_1 + x_2 = 8$. По условию $3x_1 + 4x_2 = 29$. Для нахождения корней x_1 и x_2 решим систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 = 29 \end{cases}$ способом подстановки. Выразим из первого уравнения $x_2 = 8 - x_1$ и подставим во второе уравнение: $3x_1 + 4(8 - x_1) = 29$, или $3x_1 + 32 - 4x_1 = 29$, откуда $x_1 = 3$. Теперь находим $x_2 = 8 - x_1 = 8 - 3 = 5$. Используя теорему Виета, найдем значение параметра: $a = x_1x_2 = 3 \cdot 5 = 15$.

Ответ: $a = 15$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$.

12. Очевидно, что уравнение $(a - 3)x^2 + ax - 2a + 3 = 0$ при $a - 3 = 0$ (т. е. $a = 3$) является линейным и при $a - 3 \neq 0$ (т. е. при $a \neq 3$) квадратным. Решим эти уравнения.

Подставим значение $a = 3$ в данное уравнение и получим линейное уравнение $3x - 3 = 0$, корень которого $x = 1$.

При $a \neq 3$ найдем дискриминант данного квадратного уравнения: $D = a^2 - 4(a - 3)(-2a + 3) = a^2 + 8a^2 - 12a - 24a + 36 = 9a^2 - 36a + 36 = (3a - 6)^2$ – и его корни: $x_{1,2} = \dfrac{-a \pm (3a - 6)}{2(a - 3)}$, т. е.

$$x_1 = \frac{-a + (3a - 6)}{2(a - 3)} = \frac{2(a - 3)}{2(a - 3)} = 1 \text{ и}$$

$$x_2 = \frac{-a - (3a - 6)}{2(a - 3)} = \frac{6 - 4a}{2(a - 3)} = \frac{2(3 - 2a)}{2(a - 3)} = \frac{3 - 2a}{a - 3}.$$

Заметим, что квадратное уравнение можно решить и по-другому. Один корень ($x_1 = 1$) легко угадать. Проверим: $(a - 3) \cdot 1^2 + a \cdot 1 - 2a + 3 = a - 3 + a - 2a + 3 = 0$ (верное равенство). Тогда другой корень найдем, используя теорему Виета: $x_1 x_2 = \dfrac{3 - 2a}{a - 3}$, откуда $x_2 = \dfrac{3 - 2a}{(a - 3)x_1} = \dfrac{3 - 2a}{a - 3}$.

Ответ: при $a = 3$ $x = 1$, при $a \neq 3$ $x_1 = 1$ и $x_2 = \dfrac{3 - 2a}{a - 3}$.

13. Общий знаменатель дробей в уравнении $\dfrac{x + 3a}{x + a} - \dfrac{x + a}{x - a} = \dfrac{2a - 3a^2}{x^2 - a^2}$ равен $(x + a)(x - a)$. Учтем, что он не равен нулю, и умножим обе части уравнения на общий знаменатель. Получаем: $(x + 3a)(x - a) - (x + a)(x + a) = 2a - 3a^2$, или $x^2 - ax + 3ax - 3a^2 - x^2 - 2ax - a^2 = 2a - 3a^2$, или $0 \cdot x = a^2 + 2a$, или $0 \cdot x = a(a + 2)$. Так как левая часть уравнения равна нулю, то и правая часть должна равняться нулю, т. е. $a(a + 2) = 0$, откуда $a = 0$ и $a = -2$.

При $a = 0$ уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0$ и его решением является любое число x. Однако надо учесть, что общий знаменатель $(x + a)(x - a) \neq 0$, или $(x + 0)(x - 0) \neq 0$, или $x^2 \neq 0$, т. е. $x \neq 0$. Итак, при $a = 0$ x – любое число, кроме нуля.

При $a = -2$ уравнение также имеет вид $0 \cdot x = 0$ и его решением является любое число x. Учтем, что общий знаменатель $(x + a)(x - a) \neq 0$, или $(x + 2)(x - 2) \neq 0$, т. е. $x \neq \pm 2$. Итак, при $a = -2$ x – любое число, кроме ± 2.

При $a \neq 0$ и $a \neq -2$ уравнение корней не имеет.

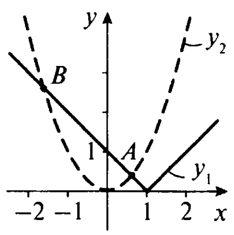
Ответ: при $a \neq 0$ и $a \neq -2$ корней нет; при $a = 0$ x – любое число, кроме 0; при $a = -2$ x – любое число, кроме ± 2.

14. Сначала решим уравнение $|x - 1| = x^2$ аналитически. Надо рассмотреть два случая:

а) $x - 1 = x^2$, или $0 = x^2 - x + 1$. Дискриминант D этого квадратного уравнения отрицательный, и оно не имеет корней;

б) $x - 1 = -x^2$, или $x^2 + x - 1 = 0$. Это уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx \dfrac{-1 \pm 2{,}2}{2}$, т. е. $x_1 \approx 0{,}6$ и $x_2 \approx -1{,}6$. Эти корни удовлетворяют данному уравнению.

Теперь решим уравнение графически. Для этого построим графики функций $y_1 = |x - 1|$ и $y_2 = x^2$. Видно, что эти графики пересекаются в двух точках A и B. Абсциссы этих точек являются корнями уравнения $|x - 1| = x^2$. Приближенное значение этих корней $x_1 \approx 0{,}6$ и $x_2 \approx -1{,}6$.



Ответ: $x_1 \approx 0{,}6$ и $x_2 \approx -1{,}6$.

V. Подведение итогов урока

Глава IV
НЕРАВЕНСТВА

§ 10. ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СВОЙСТВА

Уроки 64, 65. Сравнение чисел. Числовые неравенства

Цель: рассмотреть сравнение чисел и значений алгебраических выражений.

Планируемые результаты: научиться упорядочивать числа по величине, сравнивать значения алгебраических выражений.

Тип уроков: уроки изучения нового материала.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме уроков

План уроков

1. Сравнение чисел.
2. Сравнение значений алгебраических выражений.
3. Неравенство между средними характеристиками чисел.

1. Сравнение чисел

Можно сравнить два любых числа a и b и результат сравнения записать в виде равенства или неравенства, используя знаки =, <, >. Очевидно, что для чисел a и b выполняется только одно из соотношений: $a = b$ или $a > b$, $a < b$.

Рассмотрим примеры сравнения чисел.

Пример 1

Сравним положительные обыкновенные дроби $\frac{5}{9}$ и $\frac{6}{11}$. Для этого приведем их к общему знаменателю 99 и получим $\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 11}{9 \cdot 11} = \frac{55}{99}$ и $\frac{6}{11} = \frac{6 \cdot 9}{11 \cdot 9} = \frac{54}{99}$. Знаменатели дробей $\frac{55}{99}$ и $\frac{54}{99}$

одинаковые, но числитель первой дроби 55 больше, чем числитель 54 второй дроби (т. е. $55 > 54$). Поэтому первая дробь больше второй: $\frac{55}{99} > \frac{54}{99}$, или $\frac{5}{9} > \frac{6}{11}$.

Пример 2

Сравним положительные десятичные дроби 2,716 и 2,72. Цифры в разрядах единиц и десятых у двух данных дробей одинаковые. В разряде сотых первой дроби стоит цифра 1, а второй дроби – цифра 2. Так как $1 < 2$, то первая дробь меньше, чем вторая, т. е. $2{,}716 < 2{,}72$.

Пример 3

Сравним положительные обыкновенную дробь $\frac{7}{20}$ и десятичную дробь 0,35. Для этого обратим обыкновенную дробь $\frac{7}{20}$ в десятичную и получим $\frac{7}{20} = 0{,}35$ (т. е. данные числа равны). Заметим, что можно сделать и наоборот – обратить десятичную дробь в обыкновенную. Тогда получим $0{,}35 = \frac{35}{100} = \frac{5 \cdot 7}{5 \cdot 20} = \frac{7}{20}$ (т. е. данные числа равны).

Пример 4

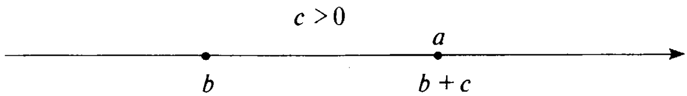
Сравним отрицательные числа -17 и -22. Найдем модули данных чисел: $|-17| = 17$ и $|-22| = 22$. Так как модуль первого отрицательного числа меньше модуля второго отрицательного числа (т. е. $17 < 22$), то первое число больше второго, т. е. $-17 > -22$.

Заметим, что в примерах 1–4 в зависимости от конкретного вида чисел использовался тот или иной способ сравнения. Очевидно, что удобно использовать *универсальный способ сравнения чисел*, охватывающий все случаи. При этом находят разность данных чисел и сравнивают с нулем (т. е. определяют, является ли эта разность положительным числом, отрицательным числом или нулем). Этот способ сравнения основан на следующем определении: число a больше числа b, если разность $a - b$ – положительное число; число a меньше числа b, если разность $a - b$ – отрицательное число; числа a и b равны, если разность $a - b$ равна нулю.

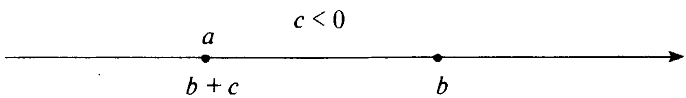
Для удобства все варианты приведены в таблице.

Разность чисел	$a - b > 0$	$a - b < 0$	$a - b = 0$
Соотношение между числами	$a > b$	$a < b$	$a = b$

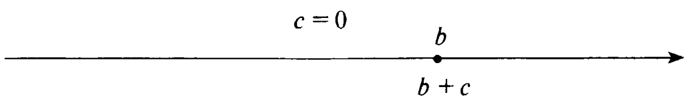
На координатной прямой большее число изображается точкой, лежащей правее, а меньшее – точкой, лежащей левее. Рассмотрим некоторые числа a и b. Обозначим их разность $a - b$ буквой c. Так как $a - b = c$, то $a = b + c$. Если c – положительное число, то точка с координатой $b + c$ лежит правее точки с координатой b, или точка a лежит правее точки с координатой b, т. е. $a > b$.



Если c – отрицательное число, то точка с координатой $b + c$ лежит левее точки с координатой b, или точка a лежит левее точки с координатой b, т. е. $a < b$.



Если c равно нулю, то точка с координатой $b + c$ совпадает с точкой с координатой b, или точки a и b совпадают, т. е. $a = b$.



Приведенное определение очень часто используется при сравнении чисел: все примеры 1–4 могут быть выполнены универсальным способом.

Пример 5

Еще раз вернемся к примеру 1 и сравним дроби $\frac{5}{9}$ и $\frac{6}{11}$. Найдем разность этих дробей: $\frac{5}{9} - \frac{6}{11} = \frac{55 - 54}{99} = \frac{1}{99}$. Так как эта разность положительна (т. е. $\frac{5}{9} - \frac{6}{11} > 0$), то первое число больше второго, т. е. $\frac{5}{9} > \frac{6}{11}$ (по определению).

2. Сравнение значений алгебраических выражений

Универсальный способ удобно использовать и при сравнении алгебраических выражений.

Пример 6

При любых значениях переменной a сравним значения выражений $(a - 2)(a - 7)$ и $(a - 4)(a - 5)$.

Найдем разность данных выражений: $(a-2)(a-7)-(a-4)(a-5)=(a^2-7a-2a+14)-(a^2-5a-4a+20)=(a^2-9a+14)-(a^2-9a+20)=-6$.

При любом значении a рассматриваемая разность отрицательна. Поэтому по определению первое выражение меньше второго, т. е. $(a-2)(a-7)<(a-4)(a-5)$.

3. Неравенство между средними характеристиками чисел

В математике при решении самых разных задач используется неравенство между средними характеристиками чисел.

Пример *7*

Пусть a и b — положительные числа. Для чисел a и b в математике используются их средние характеристики:

$C_{\text{ар}}=\dfrac{a+b}{2}$ — среднее арифметическое,

$C_{\text{г}}=\sqrt{ab}$ — среднее геометрическое,

$C_{\text{гар}}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}$ — среднее гармоническое.

Для средних характеристик чисел выполняется неравенство: $C_{\text{гар}}\le C_{\text{г}}\le C_{\text{ар}}$, или $\dfrac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$.

При этом неравенство превращается в равенство только для $a=b$. Докажем это неравенство двумя способами: алгебраическим и геометрическим.

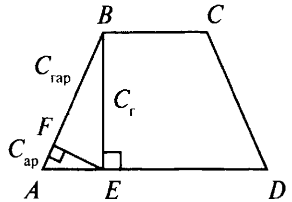
Алгебраический способ. Докажем сначала неравенство $\dfrac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}$. Рассмотрим разность: $\sqrt{ab}-\dfrac{2ab}{a+b}=\dfrac{\sqrt{ab}(a+b)-2ab}{a+b}=\dfrac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}=\dfrac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}$.

Так как a и b — положительные числа, то эта разность неотрицательна. При этом разность равна нулю только при $a=b$. Таким образом, выполнено неравенство $\dfrac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}$.

Теперь докажем неравенство $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$. Найдем разность: $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$. Очевидно, что и эта разность неотрицательна. При этом разность равна нулю только при $a=b$. Следовательно, выполнено и неравенство $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$.

Таким образом, выполнено неравенство между средними характеристиками чисел: $\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$.

Геометрический способ. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$ $(a > b)$. Пусть в эту трапецию можно вписать окружность. Тогда выполняется равенство $AD + BC = AB + CD$ и $AB = \frac{a+b}{2}$. Проведем высоту BE трапеции. Отрезок $AE = \frac{AD - BC}{2} = \frac{a-b}{2}$.



Из прямоугольного треугольника ABE по теореме Пифагора найдем:

$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)} = \sqrt{ab}.$$

В прямоугольном треугольнике ABE проведем высоту EF. Рассмотрим подобные треугольники BFE и ABE, тогда $\frac{BF}{BE} = \frac{BE}{AB}$ и $BF = \frac{BE^2}{AB} = \frac{(\sqrt{ab})^2}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$.

Таким образом, на одном рисунке представлены:

отрезок $AB = \frac{a+b}{2} = C_{ар}$ – среднее арифметическое,

отрезок $BE = \sqrt{ab} = C_г$ – среднее геометрическое,

отрезок $BF = \frac{2ab}{a+b} = C_{гар}$ – среднее гармоническое.

Наглядно видно, что $BF < BE < AB$, или $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$.

Теперь будем увеличивать верхнее основание BC (т. е. $b \to a$). При этом трапеция $ABCD$ начнет приближаться к квадрату. Тогда длины отрезков BF, BE и AB выравниваются и неравенство между средними приближается к равенству.

Заметим, что понятия средних характеристик можно обобщить и для n положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n. При этом выполняется то же неравенство между средними. Оно становится равенством только в случае равенства всех чисел $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим часто используется при доказательстве неравенств.

Пример 8

Для всех чисел a и b докажем неравенство

$$\frac{a^2+b^2}{2}+1 \ge \sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}.$$

Для положительных чисел $a^2 + 1$ и $b^2 + 1$ запишем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{\left(a^2+1\right)+\left(b^2+1\right)}{2} \ge \sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}, \text{ или}$$

$$\frac{a^2+b^2}{2}+1 \ge \sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

III. Задания на уроке

№ 724 (устно); 726; 728 (а, б); 729 (в); 730 (а, б); 732; 735 (а); 736 (б); 738; 740.

IV. Контрольные вопросы

1. На примерах покажите способы сравнения чисел.
2. Дайте определение способа сравнения чисел a и b.
3. Поясните универсальный способ сравнения чисел.
4. Докажите неравенство между средними характеристиками чисел.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 725 (устно); 727; 728 (в, г); 729 (г); 730 (в, г); 733; 735 (б); 736 (а); 739; 741; 742.

Уроки 66, 67. Свойства числовых неравенств

Цель: рассмотреть свойства неравенств и их применение к решению задач.

Планируемые результаты: уметь использовать свойства неравенств для решения задач.

Тип уроков: уроки изучения нового материала.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определение способа сравнения чисел a и b (число a больше числа b).

2. Сравните: а) $\frac{8}{11}$ и $\frac{9}{13}$; б) $a^2 + 16$ и $8a$.

3. Докажите неравенство $(a - 3)(a + 11) < (a + 3)(a + 5)$.

Вариант 2

1. Дайте определение способа сравнения чисел a и b (число a меньше числа b).

2. Сравните: а) $\frac{8}{13}$ и $\frac{7}{11}$, б) $a^2 + 25$ и $10a$.

3. Докажите неравенство $(a - 2)(a + 9) < (a + 3)(a + 4)$.

III. Работа по теме уроков

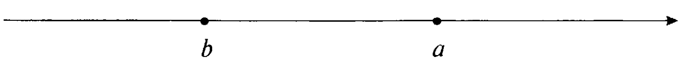
При решении задач необходимо знать основные свойства числовых неравенств, отраженные в следующих теоремах.

Теорема 1. Если $a > b$, то $b < a$, и если $a < b$, то $b > a$.

Если $a > b$, то по определению разность $a - b > 0$. Но тогда величина $b - a < 0$, что по определению означает: $b < a$.

Если $a < b$, то по определению разность $a - b < 0$. Но тогда величина $b - a > 0$, что по определению означает: $b > a$.

Геометрическая иллюстрация этого свойства приведена на рисунках.

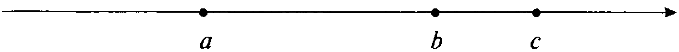


Если $a > b$, то на координатной прямой точка a расположена правее точки b. Но тогда точка b расположена левее точки a, что и означает: $b < a$.

Если $a < b$, то на координатной прямой точка a лежит левее точки b. Но тогда точка b расположена правее точки a, что и означает: $b > a$.

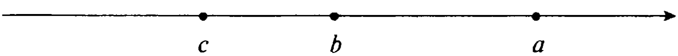
Теорема 2. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Рассмотрим разность $a - c$ и покажем, что эта разность – отрицательное число. Для этого к разности прибавим и вычтем число b и запишем ее в виде $a - c = (a - b) + (b - c)$. Так как $a < b$, то величина $a - b$ отрицательная. Аналогично, так как $b < c$, то разность $b - c$ также отрицательная. Сумма отрицательных слагаемых $a - b$ и $b - c$, очевидно, отрицательна. Тогда по определению $a < c$. Геометрическая иллюстрация этого свойства приведена на рисунке.



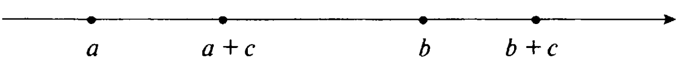
Так как $a < b$, то на координатной прямой точка b расположена правее точки a. Так как $b < c$, то точка c расположена правее точки b и тем более правее точки a. Поэтому $a < c$.

Аналогично доказывается, что если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.



Теорема 3. Если $a < b$ и c – любое число, то $a + c < b + c$.

Рассмотрим разность чисел $a + c$ и $b + c$ и получим $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$. Так как $a < b$, то разность $a - b$ отрицательна. Поэтому разность $(a + c) - (b + c)$ также отрицательна. Тогда по определению $a + c < b + c$. Геометрическая иллюстрация этого свойства приведена на рисунке.



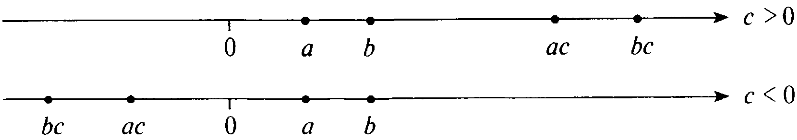
Так как $a < b$, то точка a расположена на координатной оси левее точки b. Точка $a + c$ смещена относительно точки a на такое же расстояние, как и точка $b + c$ относительно точки b. Поэтому точка $a + c$ расположена на координатной оси левее точки $b + c$ и, следовательно, $a + c < b + c$.

Итак, *если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство.*

Теорема 4. Если $a < b$ и c – положительное число, то $ac < bc$. Если $a < b$ и c – отрицательное число, то $ac > bc$.

Рассмотрим разность $ac - bc$ и запишем ее в виде $ac - bc = (a - b)c$. Так как $a < b$, то первый множитель $a - b$ в произведении – отрицательное число.

Если $c > 0$, то произведение $(a - b)c$ отрицательно и, следовательно, $ac < bc$. Если $c < 0$, то произведение $(a - b)c$ положительно и, следовательно, $ac > bc$. Геометрическая иллюстрация этого свойства приведена на рисунке (для определенности числа a и b положительны).



Так как деление можно заменить умножением на число, обратное делителю, то свойство, аналогичное рассмотренному, справедливо и для деления.

Итак, *если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство. Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и при этом изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.*

Следствие. Если a и b – положительные числа и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Разделим обе части неравенства $a < b$ на положительное число ab. При этом знак неравенства (по теореме 4) не меняется, и получаем $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$. Сократим дроби в этом неравенстве и получим $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, или (по теореме 1) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Рассмотрим примеры использования перечисленных свойств неравенств при решении задач.

Пример 1

Оценим периметр квадрата со стороной a (см), если известно, что $18{,}1 < a < 18{,}2$.

Периметр квадрата со стороной a равен $P = 4a$. Поэтому умножим все части данного двойного неравенства $18{,}1 < a < 18{,}2$ на положительное число 4. По теореме 4 получаем верное двойное неравенство того же знака $18{,}1 \cdot 4 < a \cdot 4 < 18{,}2 \cdot 4$, или $72{,}4 < P < 72{,}8$. Итак, периметр P квадрата больше 72,4 см, но меньше 72,8 см.

Пример 2

Докажем неравенство $a^2 + 5 > 4a$.

Рассмотрим верное неравенство $(a - 2)^2 + 1 > 0$ (сумма неотрицательного выражения $(a - 2)^2$ и положительного числа 1 будет положительной величиной), или $a^2 - 4a + 4 + 1 > 0$, или $a^2 - 4a + 5 > 0$. К обеим частям этого верного неравенства прибавим одно и то же число $4a$. Тогда по теореме 3 получаем также верное неравенство $a^2 - 4a + 5 + 4a > 0 + 4a$, или $a^2 + 5 > 4a$, что и требовалось доказать.

Очень важно обратить внимание учащихся на четкое знание теорем. В противном случае можно допустить грубые ошибки.

Пример 3

Рассмотрим верное неравенство $-2 < 3$. Если использовать следствие теоремы 4, то получим неравенство $\frac{1}{-2} > \frac{1}{3}$, которое, очевидно, неверно. Ошибка связана с тем, что использованное следствие применимо лишь в том случае, если обе части исходного верного неравенства являются положительными числами. В этом примере левая часть верного неравенства $-2 < 3$ была числом отрицательным.

IV. Задания на уроках

№ 746; 748; 749 (а, в); 750; 753 (б, г); 754 (а, в); 756; 757; 760.

V. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и докажите теорему 1. Дайте ее геометрическую иллюстрацию.
2. Сформулируйте и докажите теорему 2. Приведите ее геометрическую иллюстрацию.
3. Сформулируйте и докажите теорему 3.
4. Сформулируйте и докажите теорему 4 и следствие из нее.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 747; 749 (б, г); 751; 753 (а, в); 754 (б, г); 755; 758; 759; 762.

Уроки 68–70. Сложение и умножение числовых неравенств

Цель: рассмотреть другие свойства числовых неравенств и их применение к решению задач.

Планируемые результаты: научиться применять свойства неравенств для решения задач.

Тип уроков: уроки-исследования, урок общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Докажите теорему 1.
2. Сформулируйте теорему 3.
3. Оцените величину $5a - 2$, если $1{,}1 < a \le 1{,}2$.
4. Сравните числа a и b, если верно неравенство $3a - 3b \ge 1$.

Вариант 2

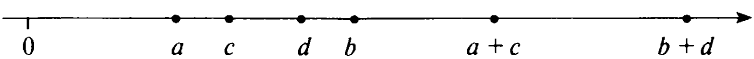
1. Докажите теорему 2.
2. Сформулируйте теорему 4.
3. Оцените величину $6a - 4$, если $1{,}6 \le a < 1{,}2$.
4. Сравните числа a и b, если верно неравенство $4a - 4b \le -1$.

III. Работа по теме уроков

Рассмотрим другие свойства числовых неравенств – теоремы о *почленном сложении* и *умножении неравенств.*

Теорема 5. Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

К обеим частям неравенства $a < b$ прибавим число c и получим верное неравенство $a + c < b + c$. Аналогично к обеим частям неравенства $c < d$ прибавим число b и получим верное неравенство $b + c < b + d$. Сравнивая два неравенства $a + c < b + c$ и $b + c < b + d$, получаем неравенство $a + c < b + d$. Геометрическая иллюстрация теоремы приведена на рисунке.

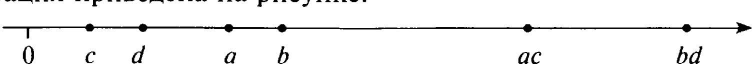


Доказанная теорема справедлива и в случае почленного сложения трех и более неравенств.

Итак, *если сложить почленно верные неравенства одного знака, то получится верное неравенство того же знака.*

Теорема 6. Если a, b, c, d – положительные числа и $a < b$, $c < d$, то $ac < bd$.

Умножим обе части неравенства $a < b$ на положительное число c и получим верное неравенство $ac < bc$. Аналогично умножим обе части неравенства $c < d$ на положительное число b и получим верное неравенство $bc < bd$. Сравнивая два неравенства $ac < bc$ и $bc < bd$, получаем неравенство $ac < bd$. Геометрическая иллюстрация приведена на рисунке.



Теорема справедлива и в случае почленного умножения трех и более неравенств подобного вида.

Итак, *если перемножить почленно верные неравенства одного знака с положительными частями, то получится верное неравенство того же знака.*

Обратите внимание учащихся на точную формулировку теоремы. Если среди чисел a, b, c и d имеются отрицательные, то неравенство $ac < bd$ может оказаться и неверным.

Пример 1

Рассмотрим неравенства:

а) $-1 < 4$ и $2 < 3$. При почленном умножении этих неравенств получаем верное неравенство $-1 \cdot 2 < 4 \cdot 3$, или $-2 < 12$;

б) $-5 < 1$ и $-2 < 3$. При почленном умножении этих неравенств получаем неверное неравенство $(-5) \cdot (-2) < 1 \cdot 3$, или $10 < 3$.

Таким образом, при нарушении условий теоремы может быть получено как верное, так и неверное неравенство.

Следствие. Если a и b – положительные числа и $a < b$, то $a^n < b^n$ (n – натуральное число).

Умножим почленно n верных неравенств $a < b$ с положительными левой и правой частями. Тогда получим верное неравенство $a^n < b^n$ (по теореме 6).

Доказанные свойства неравенств могут быть использованы при оценке суммы, разности, произведения и частного.

Пример 2

Пусть $33 < a < 34$ и $2 < b < 3$. Оценим сумму, разность, произведение и частное чисел a и b.

а) Почленно сложим два данных двойных неравенства одного знака и получим верное неравенство того же знака $33 + 2 < a + b < 34 + 3$, или $35 < a + b < 37$.

б) Для оценки разности $a - b$ сначала оценим число $-b$. Для этого умножим все части неравенства $2 < b < 3$ на отрицательное число -1. Знак неравенства при этом изменится на противоположный: $2 \cdot (-1) > b \cdot (-1) > 3 \cdot (-1)$, или $-2 > -b > -3$, т. е. $-3 < -b < -2$. Теперь почленно сложим два неравенства одного знака: $33 < a < 34$ и $-3 < -b < -2$. Получим верное неравенство того же знака $33 - 3 < a - b < 34 - 2$, или $30 < a - b < 32$.

в) Почленно умножим два неравенства одного знака $33 < a < 34$ и $2 < b < 3$ с положительными частями. Получим верное неравенство того же знака $33 \cdot 2 < a \cdot b < 34 \cdot 3$, или $66 < ab < 102$.

г) Для оценки отношения $\frac{a}{b}$ сначала оценим число $\frac{1}{b}$. Так как в неравенстве $2 < b < 3$ все части положительные, то верно неравенство $\frac{1}{2} > \frac{1}{b} > \frac{1}{3}$, т. е. $\frac{1}{3} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$. Теперь почленно умножим два неравенства одного знака: $33 < a < 34$ и $\frac{1}{3} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$ – с положительными частями. Получим верное неравенство того же знака: $33 \cdot \frac{1}{3} < a \cdot \frac{1}{b} < 34 \cdot \frac{1}{2}$, или $11 < \frac{a}{b} < 17$.

Рассмотренные свойства неравенств используются и при доказательстве неравенств.

Пример 3

Докажем неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.

Для чисел a^2 и b^2 запишем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 \cdot b^2} = |ab| \geq ab$ (очевидно, что для любого числа x верно неравенство $|x| \geq x$). Было получено верное неравенство $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$. Аналогично запишем еще два неравенства: $\frac{b^2 + c^2}{2} \geq bc$ и $\frac{a^2 + c^2}{2} \geq ac$. Теперь почленно сложим три неравенства одного знака и получим верное неравенство того же знака: $\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + c^2}{2} \geq ab + bc + ac$, или $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$. Заметим, что неравенство обращается в равенство только при $a = b = c$ (именно в этом случае каждое из неравенств между средним арифметическим и средним геометрическим обращается в равенство).

IV. Задания на уроках

№ 765 (а); 766 (б); 767; 769; 770; 773; 775; 776.

V. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и докажите теорему 5.
2. Сформулируйте и докажите теорему 6 и следствие из нее.

VI. Творческие задания

1. Докажите неравенства (используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим):

а) $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$;

б) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ (a, b – числа одного знака);

в) $\frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 12$ (a, b – числа одного знака);

г) $\frac{a + 4}{2} + \frac{a + 9}{2} > 5\sqrt{a}$ $(a \geq 0)$;

д) $\dfrac{a+9}{2}+\dfrac{a+16}{2}>7\sqrt{a}$ $(a\ge 0)$;

е) $(a^3+b)(a+b^3)\ge 4a^2b^2$ $(a,\ b\ge 0)$;

ж) $(a+1)(b+1)(ab+1)\ge 8ab$ $(a,\ b\ge 0)$;

з) $(a+b)(ab+9)\ge 12ab$ $(a,\ b\ge 0)$.

2. Найдите:

а) наименьшее значение выражения $x+y$, если $xy=16$ и $x>0$;

б) наименьшее значение выражения $3x+y$, если $xy=12$ и $y>0$;

в) наибольшее значение выражения xy, если $x+y=8$ и $x,\ y>0$;

г) наибольшее значение выражения xy, если $3x+y=30$ и $x,\ y>0$.

Ответы: а) 8; б) 12; в) 16; г) 15.

3. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $3x+\dfrac{12}{x}$ $(x>0)$;

б) $4x+\dfrac{9}{x}$ $(x>0)$;

в) $\dfrac{(x+9)(x+4)}{x}$ $(x>0)$;

г) $\dfrac{(x+5)(x+20)}{x}$ $(x>0)$;

д) $\dfrac{2x^2-5x+8}{x}$ $(x>0)$;

е) $\dfrac{x^2-7x+4}{x}$ $(x>0)$.

Ответы и указания: а) 12; б) 12;

в) 25, запишите выражение в виде $\dfrac{x^2+13x+36}{x}=\left(x+\dfrac{36}{x}\right)+13$;

г) 45, запишите выражение в виде $\dfrac{x^2+25x+100}{x}=\left(x+\dfrac{100}{x}\right)+25$;

д) 3, запишите выражение в виде $\left(2x+\dfrac{8}{x}\right)-5$;

е) –3, запишите выражение в виде $\left(x+\dfrac{4}{x}\right)-7$.

4. Найдите наибольшее значение выражения:

а) $\dfrac{x}{4+x^2}$ $(x>0)$;

б) $\dfrac{x^2}{9x^4+4}$;

в) $\dfrac{5x}{(x+1)(x+9)}$ $(x>0)$;

г) $\dfrac{3x}{(x+2)(x+18)}$ $(x>0)$;

д) $\dfrac{2x}{x^2+6x+25}$ $(x>0)$;

е) $\dfrac{5x}{4x^2-7x+9}$ $(x>0)$.

Ответы: а) $\dfrac{1}{4}$; б) $\dfrac{1}{12}$; в) $\dfrac{5}{16}$; г) $\dfrac{3}{32}$; д) $\dfrac{1}{8}$; е) 1.

(Указание: рассмотрите выражение, обратное данному, и найдите его наименьшее значение (аналогично заданию 3).)

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 765 (б); 766 (а); 768; 771; 772; 774; 777; 778.

Урок 71. Погрешность и точность приближения

Цель: рассмотреть понятия абсолютной и относительной погрешностей приближенного значения.

Планируемые результаты: научиться оценивать погрешность измерений.

Тип урока: продуктивный урок.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Докажите теорему 5.

2. Оцените величину $3a - 4b$, если $5 < a < 6$ и $2 < b < 3$.

3. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{4x^2 + 6x + 9}{3x}$ $(x > 0)$.

Вариант 2

1. Докажите теорему 6.

2. Оцените величину $5a - 2b$, если $7 < a < 8$ и $3 < b < 4$.

3. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{5x}{9x^2 - 3x + 4}$ $(x > 0)$.

III. Работа по теме урока

Прежде всего отметим, что в реальной жизни, науке и технике характеристики объектов выражаются только приближенными значениями. Например, длина железнодорожного рельса составляет примерно 12 м. Однако сталь при нагревании расширяется, и длина рельса увеличивается. При охлаждении сталь сужается и длина рельса уменьшается. В среднем в России перепад зимних и летних температур составляет 60°, что влияет на длину рельса. Поэтому при прокладке железнодорожного пути между рельсами оставляют зазор 2 см. То есть в этом случае меняются характеристики самого рельса.

Приближенные значения физических величин являются результатом несовершенства методов их измерений. Например, с помощью исследования радиоактивного распада элементов был определен возраст Земли (примерно 4,5 млрд лет) и наблюдаемой Вселенной (около 15 млрд лет).

И наконец, приближенные значения величин являются результатом неточности измерительного инструмента. Например, с помощью комнатного термометра можно измерить температуру с точностью до 1 °С (цена деления термометра).

Поэтому возникает вопрос о точности (качестве) измерений. Необходимо ввести характеристики, которые позволяют оценить такую точность.

Пример 1

По графику функции $y = x^2$ нашли приближенные значения этой функции: при $x = 1{,}4$ $y \approx 2{,}0$; при $x = 2{,}7$ $y \approx 7{,}3$. В данной ситуации легко найти и точные значения функции: при $x = 1{,}4$ величина $\bar{y} = 1{,}96$; при $x = 2{,}7$ значение $\bar{y} = 7{,}29$. Разумно считать, что разность между точным $\bar{y}$ и приближенным значением величины y характеризует точность определения приближенного значения величины. Так как такая разность может быть и положительной, и отрицательной, то удобно рассматривать модуль этой разности, который называют **абсолютной погрешностью**.

В нашем примере абсолютная погрешность приближенного значения, равного 2,0, составляет $|1{,}96 - 2{,}0| = 0{,}04$; абсолютная погрешность приближенного значения, равного 7,3, есть $|7{,}29 - 7{,}3| = 0{,}01$.

Однако (как отмечалось ранее), во многих случаях точное значение величины найти нельзя. Поэтому невозможно найти и абсолютную погрешность приближенного значения.

Пример 2

С помощью рулетки (с ценой деления 1 см) измерим длину доски и получим 218 см. Эта величина является приближенным значением длины, точное ее значение неизвестно. В таком случае важно указать такое число, больше которого абсолютная погрешность быть не может. В рассматриваемом примере в качестве такого числа можно взять число 1 (цену деления рулетки). Тогда абсолютная погрешность приближенного значения 218 не больше l, т. е. $|l - 218| \leq 1$.

Говорят, что число 218 есть приближенное значение длины доски l (в сантиметрах) с точностью до 1.

Обобщая рассмотренный пример, будем считать, что если $x \approx a$ и абсолютная погрешность этого приближенного значения не превосходит некоторого числа h, то число a называют *приближенным значением **x** с точностью до **h***. Пишут: $x \approx a$ с точностью до h.

Используют также запись: $x = a \pm h$. Эта запись означает, что точное значение переменной x заключено между числами $a - h$ и $a + h$, т. е. $a - h \le x \le a + h$.

В рассмотренном примере длина доски l заключена в пределах $218 - 1 \le l \le 218 + 1$, или $217 \le l \le 219$.

Однако одной абсолютной погрешности мало, чтобы характеризовать качество измерения величины.

Пример 3

С помощь рулетки (с ценой деления 1 см) измерим длину l книжной полки и длину m рельса (в см). Получим следующие результаты: $l = 100 \pm 1$ и $m = 1000 \pm 1$. Интуитивно понимаем, что длина рельса измерена более точно, чем длина полки (хотя абсолютная погрешность в обоих случаях одинакова). Поэтому используют относительную погрешность приближенного значения.

Относительной погрешностью приближенного значения называют отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения. Часто относительную погрешность указывают в процентах.

В рассмотренном примере относительная погрешность величины l составляет $\frac{1}{100} \cdot 100\% = 1\%$, относительная погрешность величины m равна $\frac{1}{1000} \cdot 100\% = 0{,}1\%$. Качество второго измерения намного выше, чем первого.

IV. Задания на уроке

№ 783 (а, в); 785 (а); 786; 788; 791; 793; 794.

V. Контрольные вопросы

1. Укажите причины приближенных значений технических и физических величин.
2. Как оценить абсолютную погрешность приближенного значения величины (покажите на примере)?
3. Как оценить относительную погрешность приближенного значения величины (покажите на примере)?

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 783 (б, г); 785 (б); 787; 789; 790; 792; 795.

Урок 72. Контрольная работа № 7 по теме «Числовые неравенства и их свойства»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 самые простые, варианты 3, 4 сложнее и варианты 5, 6 самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую свободу выбора учащимся. При таких же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла, вариантов 5, 6 – 1 балл (т. е. оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач).

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимися (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Сравните значения числовых выражений $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3}$ и $B = \frac{3}{4} \cdot (-1\frac{1}{3})$.

2. Известно, что $a > b$. Расположите в порядке возрастания числа $a + 11$, $b - 5$, $a + 2$, $b - 8$, $b - 3$.

3. Докажите неравенство $(x + 2)^2 \geq 8x$.

4. Докажите неравенство $3x^2 - 6x + 5 > 0$.

5. Для числа a выполнено неравенство $4 < a < 5$. Оцените значение выражения $2a - 7$.

6. Известны границы длин основания a и боковой стороны b равнобедренного треугольника (в мм): $24 \leq a \leq 26$ и $32 \leq b \leq 34$. Оцените периметр треугольника.

Вариант 2

1. Сравните значения числовых выражений

$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$ и $B = \frac{2}{7} \cdot (-3{,}5)$.

2. Известно, что $a < b$. Расположите в порядке убывания числа $a - 3$, $a - 8$, $b + 17$, $b + 3$, $b + 9$.

3. Докажите неравенство $(x - 3)^2 \geq -12x$.

4. Докажите неравенство $3x^2 + 12x + 13 > 0$.

5. Для числа a выполнено неравенство $3 < a < 4$. Оцените значение выражения $4a - 9$.

6. Известны границы длин основания a и боковой стороны b равнобедренного треугольника (в мм): $37 \leq a \leq 38$ и $42 \leq b \leq 44$. Оцените периметр треугольника.

Вариант 3

1. Сравните значения числовых выражений

$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{99}$ и $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{100}$.

2. Известно, что для чисел a, b, c, d выполнены неравенства $d > b$, $c < a$, $b > a$. Расположите числа a, b, c, d в порядке убывания.

3. Докажите неравенство $(a + 5)(a - 2) > (a - 5)(a + 8)$.

4. Докажите неравенство $a^2 - a \leq 50a^2 - 15a + 1$.

5. Для чисел a и b выполнены неравенства $7 \leq a \leq 8$ и $6 \leq b \leq 20$. Оцените значения выражения $3a - 2b$.

6. Найдите наименьшее значение выражения $A = x + \frac{9}{x} + 5$ (для $x > 0$).

Вариант 4

1. Сравните значения числовых выражений

$A = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{100}$ и $B = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{99}$.

2. Известно, что для чисел a, b, c, d выполнены неравенства $a > c$, $d < a$, $b > d$. Расположите числа a, b, c, d в порядке убывания.

3. Докажите неравенство $(a + 4)(a - 1) > (a - 7)(a + 10)$.

4. Докажите неравенство $a^2 + a \leq 65a^2 - 15a + 1$.

5. Для чисел a и b выполнены неравенства $8 \leq a \leq 10$ и $7 \leq b \leq 13$. Оцените значения выражения $2a - 3b$.

6. Найдите наименьшее значение выражения $A = x + \frac{16}{x} + 7$ (для $x > 0$).

Вариант 5

1. Сравните значения числовых выражений $A = \sqrt{19} + \sqrt{21}$ и $B = 2\sqrt{20}$.

2. Расположите в порядке возрастания числа $3a$, $a\sqrt{5}$, $-2a$, $a(\sqrt{3} - 1)$, $a(\sqrt{2} - 2)$, $2a$, если a – положительное число.

3. Докажите неравенство $2x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 > 0$.

4. Для чисел a и b выполнены неравенства $3 \le a \le 4$ и $4 \le b \le 5$. Оцените значения выражения $7a - \frac{20}{b}$.

5. К числителю и знаменателю правильной дроби $\frac{m}{n}$ (где m и n – натуральные числа, $m < n$) прибавили число 2. Увеличится или уменьшится дробь?

6. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{2x^4 + 7x^2 + 32}{x^2}$.

Вариант 6

1. Сравните значения числовых выражений $A = 2\sqrt{22}$ и $B = \sqrt{21} + \sqrt{23}$.

2. Расположите в порядке убывания числа $(\sqrt{5} - 2)a$, $-7a$, $4a$, $a(\sqrt{3} - \sqrt{2})$, $-a\sqrt{3}$, $2a$, если a – положительное число.

3. Докажите неравенство $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 10 > 0$.

4. Для чисел a и b выполнены неравенства $5 \le a \le 6$ и $2 \le b \le 5$. Оцените значения выражения $6a - \frac{10}{b}$.

5. Из числителя и знаменателя правильной дроби $\frac{m}{n}$ (где m и n – натуральные числа, $m < n$) вычли число 1. Увеличится или уменьшится дробь?

6. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{3x^4 + 5x^2 + 12}{x^2}$.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ (число решивших задачу правильно или почти правильно);
± (число решивших задачу со значительными погрешностями);
– (число не решивших задачу);
∅ (число не решавших задачу).

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими их).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям и разобрать наиболее трудные варианты).

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. $A > B$.
2. $b - 8$, $b - 5$, $b - 3$, $a + 2$, $a + 11$.
3. Доказано.
4. Доказано.
5. $1 < 2a - 7 < 3$.
6. $88 \le P \le 94$.

Вариант 2

1. $A > B$.
2. $b + 17$, $b + 9$, $b + 3$, $a - 3$, $a - 8$.
3. Доказано.
4. Доказано.
5. $3 < 4a - 9 < 7$.
6. $121 \le P \le 126$.

Вариант 3

1. $A > B$.
2. c, a, b, d.
3. Доказано.
4. Доказано.
5. $-19 \le 3a - 2b \le 12$.
6. $A = 11$.

Вариант 4

1. $A < B$.
2. b, d, a, c.
3. Доказано.
4. Доказано.
5. $-23 \le 2a - 3b \le -1$.
6. $A = 15$.

Вариант 5

1. Очевидно, что справедливо неравенство $\sqrt{21} + \sqrt{20} > \sqrt{20} + \sqrt{19}$. Перейдем к обратным величинам этих чисел: $\dfrac{1}{\sqrt{21} + \sqrt{20}} < \dfrac{1}{\sqrt{20} + \sqrt{19}}$ (по свойству неравенств для положительных чисел). Избавимся от иррациональностей в знаменателях дробей и получим:

$$\frac{\sqrt{21} - \sqrt{20}}{(\sqrt{21} + \sqrt{20})(\sqrt{21} - \sqrt{20})} < \frac{\sqrt{20} - \sqrt{19}}{(\sqrt{20} + \sqrt{19})(\sqrt{20} - \sqrt{19})}, \text{ или}$$

$\sqrt{21} - \sqrt{20} < \sqrt{20} - \sqrt{19}$, или $\sqrt{19} + \sqrt{21} < 2\sqrt{20}$, т. е. $A < B$.

Ответ: $A < B$.

2. Учтем, что $\sqrt{2} \approx 1{,}4$; $\sqrt{3} \approx 1{,}7$; $\sqrt{5} \approx 2{,}2$. Оценим приведенные числа: $3a$; $2{,}2a$; $-2a$; $-0{,}3a$; $-0{,}6$; $2a$. Теперь легко расположить числа в порядке возрастания: $-2a$; $-0{,}6a$; $-0{,}3a$; $2a$; $2{,}2a$; $3a$ или $-2a$; $a(\sqrt{2} - 2)$; $a(\sqrt{3} - 1)$; $2a$; $a\sqrt{5}$; $3a$.

Ответ: $-2a$; $a(\sqrt{2}-2)$; $a(\sqrt{3}-1)$; $2a$; $a\sqrt{5}$; $3a$.

3. В данном выражении выделим полные квадраты по переменным x и y и получим $2(x^2+2x)+(y^2-4y)+7>0$, или $2(x^2+$ $+2x+1)+(y^2-4y+4)+1>0$, или $2(x+1)^2+(y-2)^2+1>0$. Очевидно, что первые два слагаемых в левой части неравенства неотрицательны. Итак, неравенство доказано.

Ответ: доказано.

4. Умножим все части неравенства $3\le a\le 4$ на положительное число 7 и получим $21\le 7a\le 28$. В неравенстве $4\le b\le 5$ перейдем к обратным величинам: $\frac{1}{4}\ge\frac{1}{b}\ge\frac{1}{5}$. Умножим части неравенства на отрицательное число (-20): $-5\le-\frac{20}{b}\le-4$. Почленно сложим два получившихся неравенства одного знака: $21\le 7a\le 28$ и $-5\le-\frac{20}{b}\le 4$ – и получим $16\le 7a-\frac{20}{b}\le 24$.

Ответ: $16\le 7a-\frac{20}{b}\le 24$.

5. Новая дробь имеет вид $\frac{m+2}{n+2}$. Найдем разность между новой и старой дробями: $\frac{m+2}{n+2}-\frac{m}{n}=\frac{mn+2n-mn-2m}{n(n+2)}=\frac{2(n-m)}{n(n+2)}$. Очевидно, что знаменатель этой дроби положительный. Так как $n>m$, то и числитель дроби положительный. Поэтому $\frac{m+2}{n+2}-\frac{m}{n}>0$, или $\frac{m+2}{n+2}>\frac{m}{n}$, т. е. дробь увеличилась.

Ответ: дробь увеличилась.

6. Для функции $y=\frac{2x^4+7x^2+32}{x^2}=2x^2+7+\frac{32}{x^2}=$ $=\left(2x^2+\frac{32}{x^2}\right)+7$ используем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{2x^2+\frac{32}{x^2}}{2}\ge\sqrt{2x^2\cdot\frac{32}{x^2}}=8$ и $2x^2+\frac{32}{x^2}\ge 16$. Тогда наименьшее значение выражения $2x^2+\frac{32}{x^2}$ равно 16, а самой функции y равно 23.

Ответ: 23.

Вариант 6

1. Очевидно, что справедливо неравенство $\sqrt{22}+\sqrt{21}<$ $<\sqrt{23}+\sqrt{22}$. Перейдем к обратным величинам этих чисел:

$\frac{1}{\sqrt{22}+\sqrt{21}} > \frac{1}{\sqrt{23}+\sqrt{22}}$ (по свойству неравенств для положительных чисел). Избавимся от иррациональностей в знаменателях дробей и получим:

$$\frac{\sqrt{22}-\sqrt{21}}{(\sqrt{22}+\sqrt{21})(\sqrt{22}-\sqrt{21})} > \frac{\sqrt{23}-\sqrt{22}}{(\sqrt{23}+\sqrt{22})(\sqrt{23}-\sqrt{22})},\text{ или}$$

$\sqrt{22}-\sqrt{21} > \sqrt{23}-\sqrt{22}$, или $2\sqrt{22} > \sqrt{21}+\sqrt{23}$, т. е. $A > B$.

Ответ: $A > B$.

2. Учтем, что $\sqrt{2} \approx 1{,}4$; $\sqrt{3} \approx 1{,}7$; $\sqrt{5} \approx 2{,}2$. Оценим приведенные числа: $0{,}2a$; $-7a$; $4a$; $0{,}3a$; $-1{,}7a$; $2a$. Теперь легко расположить числа в порядке убывания: $4a$; $2a$; $0{,}3a$; $0{,}2a$; $-1{,}7a$; $-7a$ или $4a$; $2a$; $a(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; $(\sqrt{5}-2)a$; $-a\sqrt{3}$; $-7a$.

Ответ: $4a$; $2a$; $a(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; $(\sqrt{5}-2)a$; $-a\sqrt{3}$; $-7a$.

3. В данном выражении выделим полные квадраты по переменным x и y и получим: $(x^2-2x)+2(y^2+4y)+10>0$, или $(x^2-2x+1)+2(y^2+4y+4)+1>0$, или $(x-1)^2+2(y+2)^2+1>0$. Очевидно, что первые два слагаемых в левой части неравенства неотрицательны. Итак, неравенство доказано.

Ответ: доказано.

4. Умножим все части неравенства $5 \le a \le 6$ на положительное число 6 и получим: $30 \le 6a \le 36$. В неравенстве $2 \le b \le 5$ перейдем к обратным величинам: $\frac{1}{2} \ge \frac{1}{b} \ge \frac{1}{5}$. Умножим части неравенства на отрицательное число (-10): $-5 \le -\frac{10}{b} \le -2$. Почленно сложим два получившихся неравенства одного знака: $30 \le 6a \le 36$ и $-5 \le -\frac{10}{b} \le -2$ – и получим $25 \le 6a - \frac{10}{b} \le 34$.

Ответ: $25 \le 6a - \frac{10}{b} \le 34$.

5. Новая дробь имеет вид $\frac{m-1}{n-1}$. Найдем разность между новой и старой дробями: $\frac{m-1}{n-1} - \frac{m}{n} = \frac{mn-n-mn+m}{n(n-1)} = \frac{(m-n)}{n(n-1)}$. Очевидно, что знаменатель этой дроби положительный. Так как $n > m$, то числитель дроби отрицательный. Поэтому $\frac{m-1}{n-1} - \frac{m}{n} < 0$, или $\frac{m-1}{n-1} < \frac{m}{n}$, т. е. дробь уменьшилась.

Ответ: дробь уменьшилась.

6. Для функции $y = \frac{3x^4 + 5x^2 + 12}{x^2} = 3x^2 + 5 + \frac{12}{x^2} = \left(3x^2 + \frac{12}{x^2}\right) + 5$ используем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{3x^2 + \frac{12}{x^2}}{2} \ge \sqrt{3x^2 \cdot \frac{12}{x^2}} = 6$ и $3x^2 + \frac{12}{x^2} \ge 12$. Тогда наименьшее значение выражения $3x^2 + \frac{12}{x^2}$ равно 12, а самой функции y равно 17.

Ответ: 17.

VI. Подведение итогов урока

§ 11. НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ИХ СИСТЕМЫ

Урок 73. Пересечение и объединение множеств

Цель: рассмотреть операции над множествами.

Планируемые результаты: научиться различать пересечение и объединение множеств.

Тип урока: продуктивный урок.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

Рассмотрим некоторые понятия теории множеств. *Множество* относится к первичным неопределяемым понятиям (подобно понятию натурального числа, точки, плоскости и т. д.). Поэтому под множеством будем понимать совокупность (или набор) элементов, отобранных по определенному признаку (признакам). Например: множество книг в шкафу, множество точек данной фигуры, множество двузначных натуральных чисел и т. д. Заметим, что понятие «множество» не следует понимать как совокупность, содержащую «много» элементов. Множество может содержать один, два и более элементов. Более того, в математике приходится рассматривать и *пустое множество*, которое не содержит ни одного элемента. Например, множество книг в данном шкафу (а шкаф может быть и платяным) может оказаться пустым.

Множества обычно обозначают прописными буквами латинского алфавита: A, B и т. д., а их элементы – строчными буквами: a, b, ... Пустое множество обозначают символом $\varnothing$. Если множество A состоит из n элементов a_1, a_2, ..., a_n, то пишут: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Говорят, что элемент a принадлежит множеству A и записывают: $a \in A$ или $A \ni a$ (A содержит a). Если элемент a не принадлежит множеству A (A не содержит a), то записывают так: $a \notin A$ или $A \not\ni a$.

Пример 1

Пусть A – множество цифр, т. е. $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Тогда, очевидно, $7 \in A$ и $10 \notin A$.

Рассмотрим две основные операции над множествами: пересечение множеств и объединение множеств.

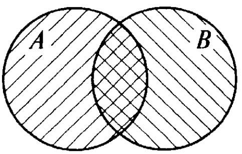
Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно обоим множествам. Пересечение этих множеств обозначают символом $A \cap B$.

Пример 2

Пусть даны множества $A = \{2, 3, 5, 7, 9\}$ и $B = \{1, 3, 7, 8, 9\}$. Так как числа 3, 7 и 9 одновременно принадлежат обоим множествам, то эти числа являются элементами множества $A \cap B$, т. е. $A \cap B = \{3, 7, 9\}$.

Можно дать наглядную иллюстрацию такой операции. Пусть A и B – множества точек данных фигур. Тогда фигура, являющаяся общей частью фигур A и B, содержит точки, одновременно принадлежащие этим фигурам. Поэтому эта общая часть – пересечение данных множеств $A \cap B$ (выделено двойной штриховкой).

Подобное схематическое изображение множеств называют *диаграммой Эйлера*.



$A \cap B$

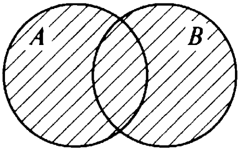
Если множества A и B не имеют общих элементов, то пересечением этих множеств будет пустое множество.

Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств. Объединение этих множеств обозначают символом $A \cup B$.

Пример 3

Еще раз вернемся к примеру 2. Опять рассмотрим множества $A = \{2, 3, 5, 7, 9\}$ и $B = \{1, 3, 7, 8, 9\}$. Так как числа 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9 принадлежат или множеству A, или множеству B, или обоим этим множествам, то эти числа являются элементами множества $A \cup B$, т. е. $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$.

Дадим иллюстрацию такой операции. Заштрихованная фигура содержит точки, принадлежащие или фигуре A, или фигуре B, или обеим этим фигурам. Поэтому заштрихованная фигура — объединение данных множеств A и B.



III. Задания на уроке

№ 799; 801 (а, б); 802 (а); 803 (б); 804 (а); 805 (в); 807; 808 (а).

IV. Контрольные вопросы

1. Дайте определение пересечения множеств A и B. Приведите примеры.
2. Дайте определение объединения множеств A и B. Приведите примеры.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 800; 801 (в, г); 802 (б); 803 (а); 804 (б); 805 (а, б); 806; 808 (б).

Урок 74. Числовые промежутки

Цель: рассмотреть числовые промежутки.

Планируемые результаты: знать виды числовых промежутков.

Тип урока: урок проблемного изложения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определение пересечения множеств A и B. Проиллюстрируйте диаграммой Эйлера.

2. Найдите пересечение и объединение множеств букв, используемых в записи слов «геометрия» и «геология».

Вариант 2

1. Дайте определение объединения множеств A и B. Проиллюстрируйте диаграммой Эйлера.

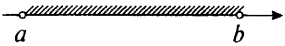
2. Найдите пересечение и объединение множеств букв, используемых в записи слов «алгебра» и «алгоритм».

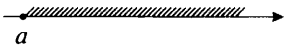
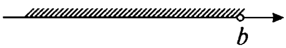
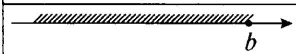
III. Работа по теме урока

Известно, что каждое число x на координатной прямой изображается точкой. Также верно и обратное утверждение: каждая точка на координатной прямой соответствует какому-то числу x. Рассмотрим на координатной прямой точки с координатами a и b. Если точка расположена между ними, то ей соответствует число x, которое больше числа a и меньше числа b (т. е. число x удовлетворяет двойному неравенству $a < x < b$).

Верно и обратное утверждение: если число x удовлетворяет неравенству $a < x < b$, то на координатной оси число x изображается точкой, расположенной между точками с координатами a и b. Множество всех чисел, удовлетворяющих условию $a < x < b$, называют *числовым промежутком* (или *промежутком*) от a до b и обозначают символом $(a;\ b)$ (при этом читают: промежуток от a до b). Такой промежуток изображен (заштрихован) на рисунке. Заметим, что круглые скобки в символе $(a;\ b)$ указывают на то, что границы a и b в рассматриваемый промежуток не входят.

В математике рассматривают и другие виды промежутков. В таблице для каждого вида числового промежутка приведены его изображение на координатной оси, запись с помощью неравенства, обозначение и название.

Геометрическое изображение	**Запись с помощью неравенства**	**Обозначение**	**Название**
	$a < x < b$	$(a;\ b)$	Интервал
	$a \le x \le b$	$[a;\ b]$	Числовой отрезок

Геометрическое изображение	Запись с помощью неравенства	Обозначение	Название
	$a \le x < b$	$[a; b)$	Полуинтервал
	$a < x \le b$	$(a; b]$	Полуинтервал
	$x > a$	$(a; +\infty)$	Открытый числовой луч
	$x \ge a$	$[a; +\infty)$	Числовой луч
	$x < b$	$(-\infty; b)$	Открытый числовой луч
	$x \le b$	$(-\infty; b]$	Числовой луч

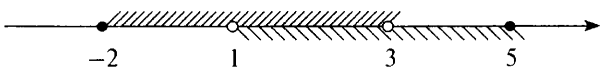
Заметим, что если граничная точка в промежуток не входит, то на координатной оси она изображается пустой точкой и в обозначении промежутка выделяется круглой скобкой. Если граничная точка в промежуток входит, то на координатной оси она изображается заполненной точкой и в обозначении промежутка выделяется квадратной скобкой.

Множество действительных чисел изображается всей координатной прямой. Это множество обозначают $(-\infty; +\infty)$ (читают: промежуток от минус бесконечности до плюс бесконечности).

Теперь рассмотрим множества, представляющие собой числовые промежутки.

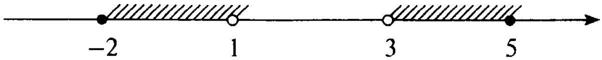
Пример

а) На рисунке изображены промежутки $[-2; 3)$ и $(1; 5]$. Промежуток $(1; 3)$ представляет собой их общую часть.



Поэтому промежуток $(1; 3)$ является пересечением промежутков $[-2; 3)$. Это можно записать так: $[-2; 3) \cap (1; 5] = (1; 3)$. Промежуток $[-2; 5]$ является объединением промежутков $[-2; 3)$ и $(1; 5]$, так как любая точка промежутка $[-2; 5]$ принадлежит или промежутку $[-2; 3)$, или промежутку $(1; 5]$, или обоим промежуткам одновременно. Это можно записать так: $[-2; 3) \cup (1; 5] = [-2; 5]$.

б) На рисунке изображены промежутки $[-2; 1)$ и $(3; 5]$. Эти промежутки не имеют общих точек. Поэтому пересечением этих промежутков является пустое множество, т. е. $[-2; 1) \cap (3; 5] = \varnothing$.



Объединением промежутков [–2; 1)⋃(3; 5] являются сами эти промежутки (а не один промежуток), так как любая точка из множества [–2; 1)⋃(3; 5] принадлежит или промежутку [–2; 1), или промежутку (3; 5].

IV. Задания на уроке

№ 812 (а, б, д); 813 (а, б); 814 (а–в); 817 (а); 820; 822; 825 (а, в); 827 (а, б).

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 812 (в, г, е); 813 (в, г); 814 (г–е); 817 (б); 821; 825 (б, г); 827 (в, г).

Уроки 75–78. Решение неравенств с одной переменной

Цели: рассмотреть решение неравенства; обсудить решение линейных неравенств с одной переменной.

Планируемые результаты: научиться выполнять равносильные преобразования и решать линейные неравенства.

Тип уроков: уроки исследования, урок-практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найдите пересечение и объединение промежутков (–5; 1] и [–2; 3], используя координатную прямую.

2. Перечислите элементы пересечения трех множеств: A, B и C, если A – множество натуральных двузначных чисел, B – множество чисел, кратных 4, C – множество чисел, кратных 7.

Вариант 2

1. Найдите пересечение и объединение промежутков [–6; 2) и (–3; 1].

2. Перечислите элементы пересечения трех множеств: A, B и C, если A – множество натуральных двузначных чисел, B – множество чисел, кратных 5, C – множество чисел, кратных 9.

III. Работа по теме уроков

План уроков

1. Решение неравенств. Равносильные неравенства.
2. Решение линейных неравенств.

1. Решение неравенств. Равносильные неравенства

Пример 1

Рассмотрим неравенство $x^2 + 16 > 10x$. При одних значениях переменной x данное неравенство обращается в верное числовое неравенство, а при других нет. Например, подставим вместо x число 9 и получим верное неравенство $9^2 + 16 > 10 \cdot 9$ или $97 > 90$. Если вместо x подставим число 5 и получим неверное неравенство, $5^2 + 16 > 10 \cdot 5$, или $41 > 50$. Поэтому число 9 является решением данного неравенства $x^2 + 16 > 10x$ или удовлетворяет этому неравенству. Легко проверить, что решениями этого неравенства являются, например, числа –2; 1; 10; 100. Напротив, числа 2; 4,5; 6; 7 не являются решениями данного неравенства.

Решением неравенства с одной переменной называют такое значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство. *Решить неравенство* – значит найти все его решения или доказать, что решений нет. Неравенства, имеющие одни и те же решения, называются *равносильными*. Неравенства, не имеющие решений, также считают равносильными.

Пример 2

а) Неравенства $2x - 6 > 0$ и $\dfrac{7}{3x-9} \geq 0$ равносильны, т. е. решением каждого неравенства являются числа, большие числа 3, т. е. $x > 3$.

б) Неравенства $x^2 + 4 \leq 0$ и $|x| + 3 < 0$ также равносильны, так как не имеют решений.

в) Неравенства $3x - 6 \geq 0$ и $2x > 8$ неравносильны, так как решение первого неравенства $x \geq 2$, а решение второго неравенства $x > 4$.

При решении используются следующие *свойства неравенств.*

1. Если из одной части неравенства перенести в другую любой член с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.

2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство.

3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

Пример 3

Неравенство $24 - 3x \le 0$ равносильно неравенству $-3x \le -24$ (перенесли число 24, изменив знак на противоположный, в правую часть). Неравенство $-3x \le -24$ равносильно неравенству $x \ge 8$ (разделили обе части на отрицательное число -3 и изменили знак неравенства на противоположный), что и является решением данного неравенства $24 - 3x \le 0$.

Свойства 1 и 2 неравенств можно доказать, используя свойства числовых неравенств. Пусть некоторое число a является решением неравенства $24 - 3x \le 0$, т. е. обращает его в верное числовое неравенство $24 - 3x \le 0$. Прибавим к обеим частям этого неравенства число -24 и получим верное неравенство $24 - 3a - 24 \le 0 - 24$, или $-3a \le -24$. Это неравенство означает, что число a является решением неравенства $-3x \le -24$.

Было показано, что каждое решение неравенства $24 - 3x \le 0$ является и решением неравенства $-3x \le -24$. Рассуждая аналогично, можно показать, что каждое решение неравенства $-3x \le -24$ будет и решением неравенства $24 - 3x \le 0$. Таким образом, неравенства $24 - 3x \le 0$ и $-3x \le -24$ имеют одни и те же решения, т. е. являются равносильными. Подобным способом можно показать, что неравенства $-3x \le -24$ и $x \ge 8$ также будут равносильными.

Аналогично доказывается, что и в общем случае свойства 1 и 2 неравенств выполняются.

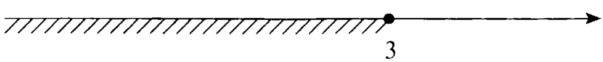
2. Решение линейных неравенств

Неравенство вида $ax + b \vee 0$ (где $\vee$ – знак сравнения, может быть одним из следующих: $>$, $\ge$, $<$ или $\le$) называют *линейным неравенством с одной переменной*. Заметим, что левая часть линейного неравенства является линейной функцией.

Пример 4

Решим неравенство $8x \le 3x + 15$.

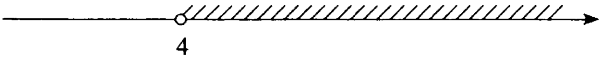
Перенесем слагаемое $3x$ с противоположным знаком в левую часть неравенства: $8x - 3x \le 15$. Приведем подобные члены: $5x \le 15$. Разделим обе части неравенства на положительное число 5 (при этом знак неравенства сохраняется) и получим $x \le 3$. Множество решений данного неравенства состоит из чисел, которые меньше или равны числу 3. Такое множество представляет собой числовой промежуток $(-\infty; 3]$, изображенный на рисунке.



Пример 5

Решим неравенство $3(2x - 1) > 2(x + 2) + x + 5$.

Раскроем скобки в обеих частях неравенства: $6x - 3 > 2x + 4 + x + 5$. Приведем в правой части подобные члены: $6x - 3 > 3x + 9$. Перенесем с противоположным знаком член $3x$ из правой части в левую, а член -3 – из левой части в правую: $6x - 3x > 9 + 3$. Опять приведем подобные члены в обеих частях неравенства: $3x > 12$. Разделим обе части неравенства на положительное число 3 (при этом знак неравенства сохраняется) и получим $x > 4$. Множество решений данного неравенства состоит из всех чисел, больших 4. Такое множество представляет собой промежуток $(4; +\infty)$, изображенный на рисунке.



Пример 6

Решим неравенство $\frac{3x+2}{4} + \frac{x-1}{3} > \frac{x+2}{6} + 9$.

Наименьший общий знаменатель дробей, входящих в неравенство, равен 12. Поэтому умножим обе части неравенства на положительное число 12 (знак неравенства при этом сохраняется) и получим $\frac{3x+2}{4} \cdot 12 + \frac{x-1}{3} \cdot 12 > \frac{x+2}{6} \cdot 12 + 9 \cdot 12$, или $(3x + 2) \cdot 3 + (x - 1) \cdot 4 > (x + 2) \cdot 2 + 108$, или $9x + 6 + 4x - 4 > 2x + 4 + 108$. Приведем подобные члены в обеих частях неравенства $13x + 2 > 2x + 112$. Перенесем член $2x$ в левую часть неравенства, а число 2 – в правую: $13x - 2x > 112 - 2$. Приведем подобные члены: $11x > 110$. Разделим обе части неравенства на положительное число 11 и получим $x > 10$, т. е. промежуток $(10; +\infty)$.

Разумеется, как и линейное уравнение, *линейное неравенство может не иметь решений, либо его решением будет любое число.*

Пример 7

Решим неравенство $2(x - 2) - (x - 3) > 4(x - 1)$.

В обеих частях неравенства раскроем скобки: $5x - 10 - x + 3 > 4x - 4$, приведем подобные члены: $4x - 7 > 4x - 4$. Перенесем члены неравенства, зависящие от x, в левую часть, а числа – в правую часть: $4x - 4x > -4 + 7$. Запишем (после приведения подобных членов) неравенство в виде $0 \cdot x > 3$. Так как при любом значении x полученное неравенство обращается в неверное числовое неравенство $0 > 3$, то данное неравенство решений не имеет, т. е. $x \in \varnothing$.

Пример 8

Решим неравенство $2(x - 3) + 2(x + 1) \geq 4(x - 2)$.

Раскроем скобки в обеих частях неравенства: $2x - 6 + 2x + 2 \geq 4x - 8$ – и приведем подобные члены: $4x - 4 \geq 4x - 8$.

Перенесем члены неравенства, зависящие от x, в левую часть, а числа – в правую часть: $4x - 4x \geq -8 + 4$. После приведения подобных членов запишем неравенство в виде $0 \cdot x \geq -4$. Так как при любом значении x полученное неравенство обращается в верное числовое неравенство $0 \geq -4$, то решением данного неравенства будет любое число x, т. е. $x \in (-\infty; +\infty)$.

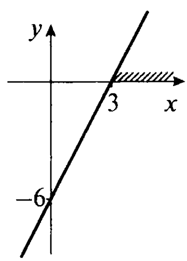
Так же как и решение линейных уравнений, решение линейных неравенств имеет наглядную графическую иллюстрацию.

Пример 9

Решим графически неравенство $2x - 6 > 0$.

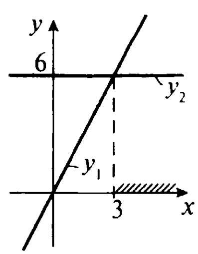
Для решения используем два подхода.

а) Рассмотрим линейную функцию $y = 2x - 6$ и построим ее график.



Тогда графический смысл неравенства $2x - 6 > 0$ – найти те значения x, при которых значения функции $y = 2x - 6$ положительны. Так как точка пересечения графика функции $y(x)$ с осью x равна $x = 3$ (т. е. $y = 0$ при $x = 3$), то данное неравенство выполняется при $x > 3$, т. е. решение $x \in (3; +\infty)$.

б) Запишем данное неравенство $2x - 6 > 0$ в виде $2x > 6$. Рассмотрим две линейные функции: $y_1 = 2x$ (прямая пропорциональность, ее график проходит через начало координат) и $y_2 = 6$ (график этой функции – горизонтальная прямая).



Графический смысл неравенства $2x > 6$ – найти те значения x, при которых значения функции y_1 больше значений функции y_2. Точка пересечения графиков функций y_1 и y_2 равна $x = 3$.

Из рисунка видно, что данное неравенство выполняется при $x > 3$, т. е. его решение $x \in (3; +\infty)$.

Разумеется, при использовании двух разных подходов был получен один и тот же ответ. Поэтому можно применять тот подход, который более удобен для вас.

IV. Задания на уроках

№ 833; 836 (а, б); 838; 840 (а, в); 842; 845 (а, г); 849 (г); 852 (а, б); 854 (а, д); 856 (а); 859 (в, д); 860 (а); 861 (б); 863; 865; 867.

V. Контрольные вопросы

1. Что называется решением неравенства с одной переменной?
2. Какие неравенства считаются равносильными?
3. Сформулируйте свойства равносильности неравенств.
4. Что называется линейным неравенством с одной переменной?
5. На примере поясните графический способ решения линейных неравенств.

VI. Творческие задания

Аналитически и графически решите неравенство:

1) $-2x + 4 \geq 0$;
2) $3x - 6 > 0$;
3) $-2x - 6 \leq 0$;
4) $-3x + 9 < 0$;
5) $3x + 1 \geq 2x - 3$;
6) $-4x + 3 < -2x - 1$;
7) $2x + 3 > -x + 6$;
8) $3x + 1 \leq x - 5$;
9) $2(x - 1) < 2x - 4$;
10) $3(x - 2) \geq 3x - 3$;
11) $-2(x + 1) \leq 4 - 2x$;
12) $3(1 - x) \leq 6 - 3x$.

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 834; 836 (в, г); 839; 840 (г, д); 843; 845 (в, д); 849 (д); 852 (в, г); 854 (б, г); 856 (б); 859 (г, е); 860 (б); 861 (а); 864; 866; 868.

Уроки 79–82. Решение систем неравенств с одной переменной

Цель: рассмотреть решение систем неравенств и двойных неравенств.

Планируемые результаты: получить навыки решения систем неравенств.

Тип уроков: уроки общеметодологической направленности, продуктивные уроки.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Решите аналитически неравенство:

а) $3(x-1)+2(x+2)<4(x+1)$; б) $\frac{x-2}{2}+\frac{3x}{4}\geq 4$.

2. Решите графически неравенство:

а) $4-2x\leq 0$; б) $x-1>2(x+1)$.

Вариант 2

1. Решите аналитически неравенство:

а) $2(x+1)+3(x-2)>4(x-1)$; б) $\frac{x-3}{3}+\frac{2x}{6}\leq 3$.

2. Решите графически неравенство:

а) $2x+6\geq 0$; б) $x+1<2(x-1)$.

III. Работа по теме уроков

Во многих случаях приходится иметь дело не с одним неравенством, а с *системой неравенств с одной переменной*. Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором выполняется каждое неравенство системы. Решить систему неравенств – значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Пример 1

Рассмотрим систему неравенств $\begin{cases} x^2\geq 4, \\ 3x-5>0. \end{cases}$

Число $x=3$ является решением такой системы, так как при подстановке такого значения в неравенства системы получаем верные числовые неравенства (т. е. неравенства системы выполняются) $\begin{cases} 3^2\geq 4, \\ 3\cdot 3-5>0. \end{cases}$ Число $x=-3$ не является решением системы, так как при подстановке в систему такого значения первое неравенство выполняется, а второе нет: $\begin{cases} (-3)^2\geq 4, \\ 3\cdot(-3)-5>0. \end{cases}$

Пример 2

Рассмотрим систему неравенств $\begin{cases} 2x-3\geq 0, \\ |x-3|+|x|<2. \end{cases}$

Такая система решений не имеет, так как не имеет решений второе неравенство (в этом легко убедиться, построив график левой части этого неравенства).

Для решения системы неравенств необходимо:

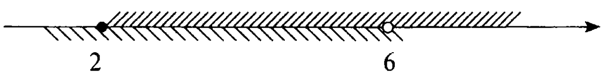
1) решить каждое неравенство в отдельности, т. е. найти множество решений такого неравенства;

2) найти пересечение этих множеств, которое и будет решением системы неравенств.

Пример 3

Решим систему неравенств $\begin{cases} 3x - 5 \geq 1, \\ 2x - 1 < 11. \end{cases}$

Будем параллельно решать каждое из неравенств системы. Получаем $\begin{cases} 3x \geq 1 + 5, \\ 2x < 11 + 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 3x \geq 6, \\ 2x < 12, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \geq 2, \\ x < 6. \end{cases}$ На координатной оси изобразим решения первого (вверху) и второго (внизу) неравенств.



Из рисунка видно, что пересечением множества решений неравенств является промежуток [2; 6), т. е. оба неравенства системы выполняются на этом промежутке. Поэтому промежуток [2; 6) является решением данной системы неравенств.

Заметим, что далеко не всегда необходимо решать все неравенства системы. В ряде случаев достаточно решить самое простое неравенство и проверить выполнение других неравенств системы для найденного решения.

Пример 4

Решим систему неравенств $\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0, \\ x^3 + 3x^2 + 5x + 1 > 0, \\ 2x - 4 \geq 0. \end{cases}$

Заметим, что первое неравенство имеет вторую степень (квадратное неравенство), второе неравенство – третью степень (кубическое неравенство), третье неравенство – первую степень (линейное неравенство). Решение квадратных и кубических неравенств в 8 классе не изучается. Поэтому решим последнее линейное неравенство и запишем первое неравенство в другом виде. Получаем $\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0, \\ x^3 + 3x^2 + 5x + 1 > 0, \\ 2x - 4 \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x(x-2) \geq 0, \\ x^3 + 3x^2 + 5x + 1 > 0, \\ x \geq 2. \end{cases}$

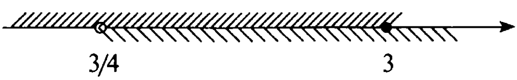
Решение третьего неравенства – промежуток $[2; +\infty)$. Очевидно, что первое неравенство для таких x выполняется, так как в левой части оба множителя неотрицательны (т. е. $x \geq 2$ и $x - 2 \geq 0$) и их произведение также неотрицательно. Второе неравенство при $x \geq 2$ тоже выполняется, так как левая часть его содержит только положительные слагаемые (т. е. $x^3 > 0$, $3x^2 > 0$, $5x > 0$) и их сумма также положительна. Таким образом, решение данной системы неравенств – промежуток $[2; +\infty)$.

Часто *двойные неравенства* (далее в этом уроке будут рассмотрены только линейные двойные неравенства) сводятся к решению систем неравенств.

Пример 5

Решим двойное неравенство $3x - 5 \leq x + 1 < 5x - 2$.

Заменим данное неравенство равносильной системой линейных неравенств $\begin{cases} 3x - 5 \leq x + 1, \\ x + 1 < 5x - 2 \end{cases}$ и решим ее. Имеем $\begin{cases} 2x \leq 6, \\ 3 < 4x, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \leq 3, \\ \dfrac{3}{4} < x. \end{cases}$ На числовой оси изобразим решение этих неравенств и найдем пересечение множеств этих решений – промежуток $\left(\dfrac{3}{4}; 3\right]$. Следовательно, решение данного двойного неравенства – промежуток $\left(\dfrac{3}{4}; 3\right]$.



Заметим, что если крайние части двойного неравенства являются числами, то такое неравенство можно решить и проще (без сведения к системе неравенств). При этом используются свойства равносильности неравенств.

Пример 6

Решим двойное неравенство $-3 \leq 1 - 4x < 9$.

По свойству равносильности из всех частей неравенства вычтем число 1. Получаем равносильное неравенство $-3 - 1 \leq \leq 1 - 4x - 1 < 9 - 1$, или $-4 \leq -4x < 8$. Разделим все части неравенства на отрицательное число -4 (при этом знаки неравенства меняются на противоположные) и получим равносильное неравенство $\dfrac{-4}{-4} \geq \dfrac{-4x}{-4} > \dfrac{8}{-4}$, или $1 \geq x > -2$. Этот промежуток $(-2; 1]$

является решением данного двойного неравенства. Для подобных примеров запись удобно вести следующим образом: $-3 \le 1 - 4x < 9$, $-4 \le -4x < 8$, $1 \ge x > -2$.

Многие текстовые задачи сводятся к решению систем неравенств.

***Пример** 7*

Катер движется по реке, скорость течения которой 3 км/ч. Расстояние между пристанями составляет 100 км. При движении по течению реки катер проходит это расстояние менее чем за 4 ч, а при движении против течения – более чем за 5 ч. Какова собственная скорость катера?

Пусть собственная скорость катера x (км/ч), тогда скорость его по течению реки $x + 3$ (км/ч), против течения реки – $x - 3$ (км/ч). По течению реки за 4 ч катер пройдет расстояние $4(x + 3)$ (км), и это расстояние будет более 100 км. Получаем неравенство $4(x + 3) > 100$. Против течения реки за 5 ч катер пройдет расстояние $5(x - 3)$ (км), и это расстояние будет менее 100 км. Имеем неравенство $5(x - 3) < 100$.

Для нахождения собственной скорости катера получили систему линейных неравенств $\begin{cases} 4(x+3) > 100, \\ 5(x-3) < 100. \end{cases}$ Используя свойства равносильности неравенств, решим ее. Имеем $\begin{cases} x + 3 > 25, \\ x - 3 < 20, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x > 22, \\ x < 23. \end{cases}$ Поэтому решение этой системы неравенств $22 < x < 23$. Таким образом, собственная скорость катера более 22 км/ч и менее 23 км/ч.

IV. Задания на уроках

№ 874 (а, б); 877 (в, г); 879 (а, г); 882 (а, в); 883 (в); 884 (а); 886 (а, б); 889 (а); 891 (в, г); 892 (а, б); 895 (а); 896; 900 (а).

V. Контрольные вопросы

1. Что называется решением системы неравенств с одной переменной?
2. Что значит решить систему неравенств?

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 874 (в); 875; 877 (а, б); 879 (б, в); 882 (б, г); 883 (г); 884 (б); 886 (в, г); 889 (б); 891 (а, б); 892 (в, г); 895 (б); 897; 900 (б).

Урок 83. Контрольная работа № 8 по теме «Неравенства»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 самые простые, варианты 3, 4 сложнее и варианты 5, 6 самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую свободу выбора учащимся. При таких же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла, вариантов 5, 6 – 1 балл (т. е. оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач).

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимися (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Решите неравенство $3(x-1) > 2(3-x)$.
2. Решите неравенство $-2 \le 3x + 1 \le 4$.
3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3-2x \ge 0, \\ 3x+1 > 0. \end{cases}$
4. Известно, что $1{,}2 < x < 1{,}3$ и $2{,}7 < y < 2{,}8$. Оцените величину $x + 2y$.
5. При каких значениях x функция $y = 2 - 4x$ принимает отрицательные значения?
6. Найдите область определения и область значений функции $y = \sqrt{1-2x}$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $2(x-1) < 3(2-x)$.

2. Решите неравенство $-3 \le 2x - 1 \le 5$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4 - 3x \ge 0, \\ 2x + 1 > 0. \end{cases}$

4. Известно, что $1{,}8 < x < 1{,}9$ и $2{,}4 < y < 2{,}5$. Оцените величину $2x + y$.

5. При каких значениях x функция $y = 3 - 5x$ принимает отрицательные значения?

6. Найдите область определения и область значений функции $y = \sqrt{2 - 3x}$.

Вариант 3

1. Докажите неравенство $x^2 + 4x + 16 \ge 12x$.

2. Решите неравенство $\dfrac{x - 1}{4} - 1 > \dfrac{x + 1}{3} + 7$.

3. Решите неравенство $|x - 3| \le 2$.

4. Найдите область определения функции $y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x - 2}} - 3\sqrt{9 - 2x}$.

5. Известно, что $1{,}4 < x < 1{,}5$ и $2{,}7 < y < 2{,}8$. Оцените величину $7x - 3y$.

6. При всех значениях параметра a решите неравенство $ax + 1 \ge a^2 - x$.

Вариант 4

1. Докажите неравенство $x^2 + 5x + 25 \ge 15x$.

2. Решите неравенство $\dfrac{1 - 2x}{3} - 2 < \dfrac{1 - 3x}{5} + 4$.

3. Решите неравенство $|x - 2| \le 3$.

4. Найдите область определения функции $y = \dfrac{2x - 3}{\sqrt{x - 1}} + 4\sqrt{5 - 2x}$.

5. Известно, что $2{,}2 < x < 2{,}3$ и $3{,}5 < y < 3{,}6$. Оцените величину $5x - 2y$.

6. При всех значениях параметра a решите неравенство $ax + 1 \ge a^2 + x$.

Вариант 5

1. Решите неравенство
$(3x^2 + 2)(3x - 2 - (x - 3)(2x + 1) + 2x^2) < 0$.

2. Решите неравенство $|2 - 7x| \ge 1$.

3. Найдите область определения функции
$y = \dfrac{3x - 2}{\sqrt{5x + 2}} - (x + 2)\sqrt{3 - 4x}$.

4. При каких значениях a решения уравнения $4x = ax - 3$ положительны?

5. На координатной плоскости изобразите множество точек (x; y), координаты которых удовлетворяют неравенству $|y + 2x| \leq 1$.

6. При всех значениях a решите неравенство
$(a + 2)x \geq a^2 - a - 6$.

Вариант 6

1. Решите неравенство
$(2x^2 + 3)(4x - 3 - (x + 2)(2x - 1) + 2x^2) < 0$.

2. Решите неравенство $|3 - 5x| \geq 2$.

3. Найдите область определения функции

$$y = \frac{2x - 5}{\sqrt{7x + 3}} - (x - 3)\sqrt{4 - 5x}.$$

4. При каких значениях a решения уравнения $3x = ax - 7$ отрицательны?

5. На координатной плоскости изобразите множество точек (x; y), координаты которых удовлетворяют неравенству $|y - 3x| \leq 2$.

6. При всех значениях a решите неравенство $(a + 3)x \leq a^2 + a - 6$.

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	**Итоги**			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ (число решивших задачу правильно или почти правильно);

± (число решивших задачу со значительными погрешностями);

– (число не решивших задачу);

∅ (число не решавших задачу).

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими их).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям и разобрать наиболее трудные варианты).

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. $(1{,}8; +\infty)$.
2. $[-1; 1]$.
3. $\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{3}{2}\right]$.
4. $(6{,}6; 6{,}9)$.
5. $(0{,}5; +\infty)$.
6. $(-\infty; 0{,}5]$.

Вариант 2

1. $(-\infty; 1{,}6)$.
2. $[-1; 3]$.
3. $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{4}{3}\right]$.
4. $(6{,}0; 6{,}3)$.
5. $(-\infty; 0{,}6)$.
6. $\left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right]$.

Вариант 3

1. Доказано.
2. $(-\infty; -91)$.
3. $[1; 5]$.
4. $(2; 4{,}5]$.
5. $(1{,}4; 2{,}4)$.
6. При $a \in (-\infty; -1)$ $x \in (-\infty; a-1]$, при $a = -1$ $x \in (-\infty; +\infty)$, при $a \in (-1; +\infty)$ $x \in [a-1; +\infty)$.

Вариант 4

1. Доказано.
2. $(-88; +\infty)$.
3. $[-1; 5]$.
4. $(1; 2{,}5]$.
5. $(3{,}8; 4{,}5)$.
6. При $a \in (-\infty; 1)$ $x \in (-\infty; a+1]$, при $a = 1$ $x \in (-\infty; +\infty)$, при $a \in (1; +\infty)$ $x \in [a+1; +\infty)$.

Вариант 5

1. Учтем, что при всех значениях y величина $3x^2 + 2 > 0$. Используя свойство неравенств, разделим обе части данного неравенства на эту величину (при этом знак неравенства сохраняется). Получим $3x - 2 - (x-3)(2x+1) + 2x^2 < 0$, или $3x - 2 - 2x^2 - x + 6x + 3 + 2x^2 < 0$, или $8x < -1$, откуда $x < -\dfrac{1}{8}$, т. е. $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{8}\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{8}\right)$.

2. Неравенство $|2 - 7x| \geq 1$ равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 2 - 7x \leq -1, \\ 2 - 7x \geq 1, \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} 3 \leq 7x, \\ 1 \geq 7x, \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{3}{7}, \\ x \leq \dfrac{1}{7}, \end{array}\right. \text{ т. е. } x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{7}\right] \cup \left[\dfrac{3}{7}; +\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{7}\right] \cup \left[\frac{3}{7}; +\infty\right)$.

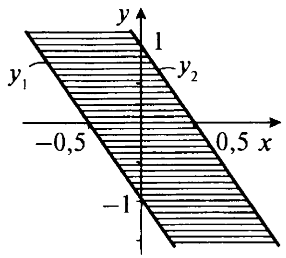
3. Область определения функции задается системой неравенств: $\begin{cases} 5x + 2 > 0, \\ 3 - 4x \geq 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} 5x > -2, \\ 3 \geq 4x, \end{cases}$ или $\begin{cases} x > -\frac{2}{5}, \\ x \leq \frac{3}{4}, \end{cases}$ т. е. $x \in \left(-\frac{2}{5}; \frac{3}{4}\right]$.

Ответ: $\left(-\frac{2}{5}; \frac{3}{4}\right]$.

4. Найдем решение уравнения $4x = ax - 3$, или $3 = (a - 4)x$, откуда $x = \frac{3}{a-4}$. Так как решения уравнения положительны, то получаем неравенство $\frac{3}{a-4} > 0$, или $a - 4 > 0$. Решение этого неравенства $a \in (4; +\infty)$.

Ответ: $(4; +\infty)$.

5. Неравенство $|y + 2x| \leq 1$ равносильно двойному неравенству $-1 \leq y + 2x \leq 1$. Вычтем из всех частей неравенства $2x$ и получим $-1 - 2x \leq y \leq 1 - 2x$.



Построим две граничные прямые: $y_1 = -1 - 2x$ и $y_2 = 1 - 2x$. Подставив координаты начала координат, видим, что неравенству удовлетворяют точки, лежащие между прямыми y_1 и y_2 и на них (эта область заштрихована).

Ответ: см. график.

6. Разложим правую часть неравенства на множители и получим $(a + 2)x \geq (a + 2)(a - 3)$. Рассмотрим три случая.

а) Если $a + 2 < 0$ (т. е. $a < -2$), то разделим обе части данного неравенства на отрицательную величину $a + 2$ (при этом знак неравенства меняется на противоположный) и получим $x \leq a - 3$.

б) Если $a + 2 = 0$ (т. е. $a = -2$), то делить на нулевой множитель нельзя. Подставив значение $a = -2$ в данное неравенство, получим $0 \cdot x \geq 0$. Очевидно, что такое неравенство выполняется при всех x, т. е. $x \in (-\infty; +\infty)$.

в) Если $a + 2 > 0$ (т. е. $a > -2$), то разделим обе части на положительную величину $a + 2$ (при этом знак неравенства сохраняется) и получим $x \geq a - 3$.

Теперь выпишем ответ в порядке возрастания параметра a.

Ответ: при $a \in (-\infty; -2)$ $x \in (-\infty; a - 3]$, при $a = -2$ $x \in (-\infty; +\infty)$, при $a \in (-2; +\infty)$ $x \in [a - 3; +\infty)$.

Вариант 6

1. Учтем, что при всех значениях y величина $2x^2 + 3 > 0$. Используя свойство неравенств, разделим обе части данного неравенства на эту величину (при этом знак неравенства сохраняется). Получим $4x - 3 - (x + 2)(2x - 1) + 2x^2 < 0$, или $4x - 3 - 2x^2 - 4x + x + 2 + 2x^2 < 0$, или $x < 1$, т. е. $x \in (-\infty; 1)$.

Ответ: $(-\infty; 1)$.

2. Неравенство $|3 - 5x| \geq 2$ равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} 2-5x \leq -2, \\ 3-5x \geq 2, \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} 5 \leq 5x, \\ 1 \geq 5x, \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} x \geq 1, \\ x \leq \dfrac{1}{5}, \end{array}\right.$ т. е. $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty)$.

3. Область определения функции задается системой неравенств $\begin{cases} 7x + 3 > 0, \\ 4 - 5x \geq 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} 7x > -3, \\ 4 \geq 5x, \end{cases}$ или $\begin{cases} x > -\dfrac{3}{7}, \\ x \leq \dfrac{4}{5}, \end{cases}$ т. е. $x \in \left(-\dfrac{3}{7}; \dfrac{4}{5}\right]$.

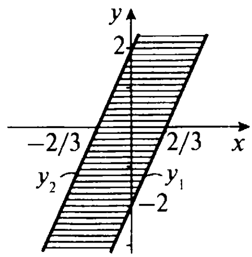
Ответ: $\left(-\dfrac{3}{7}; \dfrac{4}{5}\right]$.

4. Найдем решение уравнения $3x = ax - 7$, или $7 = (a - 3)x$, откуда $x = \dfrac{7}{a-3}$. Так как решения уравнения отрицательны, то получаем неравенство $\dfrac{7}{a-3} < 0$, или $a - 3 < 0$. Решение этого неравенства $a \in (-\infty; 3)$.

Ответ: $(-\infty; 3)$.

5. Неравенство $|y - 3x| \leq 2$ равносильно двойному неравенству $-2 \leq y - 3x \leq 2$. Прибавим ко всем частям неравенства $3x$ и получим $3x - 2 \leq y \leq 3x + 2$.

Построим две граничные прямые: $y_1 = 3x - 2$ и $y_2 = 3x + 2$. Подставив координаты начала координат, видим, что неравенству удовлетворяют точки, лежащие между прямыми y_1 и y_2 и на них (эта область заштрихована).



Ответ: см. график.

6. Разложим правую часть неравенства на множители и получим $(a + 3)x \le (a + 3)(a - 2)$. Рассмотрим три случая.

а) Если $a + 3 < 0$ (т. е. $a < -3$), то разделим обе части данного неравенства на отрицательную величину $a + 3$ (при этом знак неравенства меняется на противоположный) и получим $x \le a - 2$.

б) Если $a + 3 = 0$ (т. е. $a = -3$), то делить на нулевой множитель нельзя. Подставив значение $a = -3$ в данное неравенство, получим $0 \cdot x \le 0$. Очевидно, что такое неравенство выполняется при всех x, т. е. $x \in (-\infty; +\infty)$.

в) Если $a + 3 > 0$ (т. е. $a > -3$), то разделим обе части на положительную величину $a + 3$ (при этом знак неравенства сохраняется) и получим $x \le a - 2$.

Теперь выпишем ответ в порядке возрастания параметра a.

Ответ: при $a \in (-\infty; -3)$ $x \in [a - 2; +\infty)$, при $a = -3$ $x \in (-\infty; +\infty)$, при $a \in (-3; +\infty)$ $x \in (-\infty; a - 2]$.

Факультативный урок. Решение более сложных неравенств

Цель: рассмотреть решение более сложных неравенств.

Планируемые результаты: научиться решать неравенства повышенности сложности.

Тип урока: урок-лекция.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

План урока

1. Линейные неравенства.
2. Нелинейные неравенства.

1. Линейные неравенства

Сначала рассмотрим более сложные линейные неравенства. Как правило, их сложность связана или с громоздкостью примеров, или с наличием в них параметров.

Пример 1

Решим неравенство

$$3x(2x-1)-2\left(x+(3x-2)(x+1)-\frac{4x-2}{7}\right)\ge 8-7x.$$

В данном примере основная сложность связана с громоздкостью левой части неравенства. Поэтому выполним ее преобразования, раскрывая постепенно скобки (начиная с самых внутренних) и приводя подобные члены. Получим

$$6x^2-3x-2\left(x+3x^2+3x-2x-2-\frac{4x-2}{7}\right)\ge 8-7x, \text{ или}$$

$$6x^2-3x-2\left(3x^2+2x-2-\frac{4x-2}{7}\right)\ge 8-7x.$$

Внутри скобок приведем выражения к общему знаменателю. Имеем

$$6x^2-3x-2\cdot\frac{21x^2+14x-14-4x+2}{7}\ge 8-7x, \text{ или}$$

$$6x^2-3x-2\cdot\frac{21x^2+10x-12}{7}\ge 8-7x.$$

Умножим все члены неравенства на положительное число 7 (при этом знак неравенства сохраняется): $42x^2-21x-42x^2-20x+$ $+\,24\ge 56-49x$, или $-41x+24\ge 56-49x$. Члены неравенства, зависящие от x, перенесем в левую часть, а числа — в правую часть. Имеем $49x-41x\ge 56-24$, или $8x\ge 32$. Разделим обе части неравенства на положительное число 8 (знак неравенства сохраняется) и получим $x\ge 4$, т. е. $x\in[4;+\infty)$.

Пример 2

Решим неравенство $(a-1)x\le a^2-1$.

Для решения неравенства необходимо обе его части разделить на выражение $a-1$, зависящее от параметра a. Однако это выражение при различных значениях a будет иметь разный знак. Поэтому надо рассмотреть три случая.

а) Если $a-1<0$ (т. е. $a<1$), то при делении обеих частей данного неравенства $(a-1)x\le a^2-1$ на отрицательное выражение $a-1$ знак неравенства меняется на противоположный, находим $x\ge\dfrac{a^2-1}{a-1}$, или $x\ge a+1$, или $x\in[a+1;+\infty)$. Итак, в этом случае получили: при $a\in(-\infty;1)$ $x\in[a+1;+\infty)$.

б) Если $a - 1 = 0$ (т. е. $a = 1$), то коэффициент при x равен 0. Поэтому делить обе части данного неравенства на выражение $a - 1$ нельзя (еще раз подчеркнем, что в этом случае такое выражение равно нулю). Тогда подставим значение $a = 1$ в данное неравенство $(a - 1)x \le a^2 - 1$ и получим $0 \cdot x \le 0$. При любом значении x из этого неравенства следует верное числовое неравенство $0 \le 0$. Следовательно, в этом случае решением данного неравенства является любое число x. Итак, при $a = 1$ $x \in (-\infty; +\infty)$.

в) Если $a - 1 > 0$ (т. е. $a > 1$), то при делении обеих частей данного неравенства $(a - 1)x \le a^2 - 1$ на положительное выражение $a - 1$ знак неравенства сохраняется, и находим $x \le \dfrac{a^2 - 1}{a - 1}$, или $x \le a + 1$, или $x \in (-\infty; a + 1]$.

Так как в задачах с параметрами очень важна запись ответа (ответ записывается в порядке возрастания параметра), то приведем полный ответ.

При $a \in (-\infty; 1)$ $x \in [a + 1; +\infty)$; при $a = 1$ $x \in (-\infty; +\infty)$, при $a \in (1; +\infty)$ $x \in (-\infty; a + 1]$.

Разумеется, к решению неравенств с параметрами сводятся и более сложные задачи.

Пример 3

При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + x - 1 = 0$ не имеет решений?

Так как старший коэффициент уравнения a зависит от параметра a, то необходимо рассмотреть два случая.

а) Если $a \ne 0$, то данное уравнение $ax^2 + x - 1 = 0$ является квадратным. Такое уравнение не имеет решений, если его дискриминант $D = 1 + 4a < 0$. Решение этого неравенства $a \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{4}\right)$. Заметим, что в указанный промежуток значение $a = 0$ не входит.

б) Если $a = 0$, то данное уравнение $ax^2 + x - 1 = 0$ является линейным и имеет вид $x - 1 = 0$. Очевидно, что это уравнение имеет единственное решение $x = 1$.

Итак, при $a \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{4}\right)$ данное уравнение решений не имеет.

Пример 4

При каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2 + (a - 4)x + 3 - 3a = 0$ меньше 5?

Прежде всего решим данное квадратное уравнение. Найдем его дискриминант: $D = (a - 4)^2 - 4(3 - 3a) = a^2 - 8a + 16 - 12 +$

$+ 12a = a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$ – и корни: $x_{1,2} = \dfrac{-(a-4) \pm (a+2)}{2}$, т. е. $x_1 = 3$ и $x_2 = 1 - a$. Очевидно, что корень x_1 уже удовлетворяет условию $x_1 < 5$. Второй корень x_2 должен также удовлетворять аналогичному неравенству. Получаем неравенство $1 - a < 5$, решение которого $a > -4$, т. е. $a \in (-4; +\infty)$.

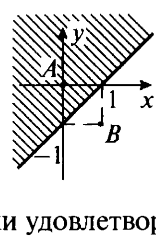
Теперь необходимо добиться, чтобы данное уравнение имело два корня (имеется в виду, два различных корня). Получаем условие $3 \neq 1 - a$, откуда $a \neq -2$. Учитывая вышенаписанное, имеем: при $a \in (-4; -2) \cup (-2; +\infty)$ оба корня данного уравнения меньше 5.

Теперь рассмотрим *линейные неравенства с двумя переменными*. Как правило, подобные задачи сводятся к изображению множества точек, координаты которых удовлетворяют неравенству, на координатной плоскости.

Пример 5

На координатной плоскости изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y - 2 \geq x - 3$.

Запишем данное неравенство в виде $y \geq x - 1$. Сначала построим график линейной функции $y = x - 1$ (прямая линия). Эта линия разделяет все точки координатной плоскости на точки, расположенные над этой прямой, и точки, расположенные под этой прямой.



Проверим, какие точки удовлетворяют данному неравенству.

Из первой области возьмем, например, контрольную точку A (0; 0) – начало координат. Легко проверить, что тогда неравенство $y \geq x - 1$ выполняется. Из второй области выберем, например, контрольную точку B (1; –1). Для такой точки неравенство $y \geq x - 1$ не выполняется. Следовательно, данному неравенству удовлетворяют точки, расположенные выше прямой $y = x - 1$ и на ней (т. е. точки, аналогичные точке A). Эти точки заштрихованы.

2. Нелинейные неравенства

Довольно часто нелинейность неравенств связана с наличием знаков модулей в неравенстве. Решают подобные неравенства аналитически (раскрывая знаки модулей) или графически.

Пример 6

Решим неравенство $|x - 1| < 3$.

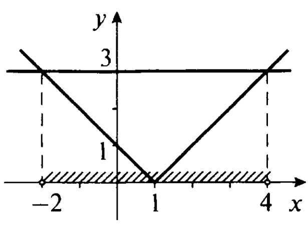
Сначала решим это неравенство аналитически, рассмотрев два случая.

а) Если $x - 1 \geq 0$ (т. е. $x \geq 1$), то $|x - 1| = x - 1$ и неравенство имеет вид $x - 1 < 3$. Решение этого неравенства $x < 4$. Учитывая условие $x \geq 1$, получаем в этом случае решение $1 \leq x < 4$, или $x \in [1; 4)$.

б) Если $x - 1 < 0$ (т. е. $x < 1$), то $|x - 1| = -x - 1 = 1 - x$ и неравенство имеет вид $1 - x < 3$. Решение этого неравенства $-2 < x$. Учитывая условие $x < 1$, получаем в этом случае решение $-2 < x < 1$, или $x \in (-2; 1)$.

Находим объединение полученных решений: $[1; 4)$ и $(-2; 1)$ – и получаем окончательный ответ: $x \in (-2; 4)$.

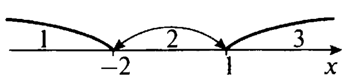
Теперь решим неравенство $|x - 1| < 3$ графически. Построим графики функций $y_1 = |x - 1|$ (он получается смещением графика функции $y = |x|$ на одну единицу вправо) и $y_2 = 3$ (горизонтальная прямая). Неравенство $|x - 1| < 3$ означает, что надо найти такие значения x, при которых значения функции y_1 меньше значений функции y_2 (или график функции y_1 лежит ниже графика функции y_2). Из рисунка видно, что такие x лежат в промежутке $(-2; 4)$.



Пример 7

Решим неравенство $|x - 1| - |x + 2| \leq -2$.

Решим такое неравенство аналитически, раскрывая знаки модулей методом интервалов. Выражение $x - 1$ меняет знак при $x = 1$, выражение $x + 2$ – при $x = -2$. Нанеся эти значения x на числовую ось, получаем три числовых промежутка (интервала).



1) Если $x \in (-\infty; -2]$, то $x - 1 < 0$ и $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$; $x + 2 \leq 0$ и $|x + 2| = -(x + 2) = -x - 2$. Тогда данное неравенство имеет вид $1 - x - (-x - 2) \leq -2$, или $3 \leq -2$. Так как получили

неверное неравенство, то ни одна точка рассматриваемого промежутка $(-\infty; -2]$ не удовлетворяет данному неравенству.

2) Если $x \in (-2; 1)$, то $x - 1 < 0$ и $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$; $x + 2 > 0$ и $|x + 2| = x + 2$. Тогда данное неравенство имеет вид $1 - x - (x + 2) \le -2$, или $-2x - 1 \le -2$. Решение этого неравенства $x \ge \frac{1}{2}$. С учетом рассматриваемого промежутка $(-2; 1)$ получаем решение: $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$.

3) Если $x \in [1; +\infty)$, то $x - 1 \ge 0$ и $|x - 1| = x - 1$, $x + 2 > 0$ и $|x + 2| = x + 2$. Тогда данное неравенство имеет вид $x - 1 - (x + 2) \le -2$, или $-3 \le -2$. Так как получили верное неравенство, то все точки рассматриваемого промежутка $x \in [1; +\infty)$ являются решениями данного неравенства.

Находим объединение полученных решений: $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$ и $[1; +\infty)$ —и получаем окончательный ответ: $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Нелинейными также являются неравенства, члены которых содержат переменную в степени выше первой.

Пример 8

Решим неравенство $|x + 1| + x^2 + 2x + 1 \le 0$.

Запишем неравенство в виде $|x + 1| + (x + 1)^2 \le 0$ и введем новую переменную $t = x + 1$. Тогда неравенство принимает вид $|t| + t^2 \le 0$. Так как $|t| \ge 0$ и $t^2 \ge 0$ при всех значениях t, то сумма $|t| + t^2 \ge 0$ при всех t. Поэтому неравенство $|t| + t^2 \le 0$ имеет единственное решение $t = 0$. Теперь вернемся к старой неизвестной x. Получаем линейное уравнение $x + 1 = 0$, решение которого $x = -1$. Итак, решение данного неравенства $x = -1$.

Существуют и подобного типа неравенства *с двумя переменными*.

Пример 9

Решим неравенство $(x - 2y + 1)^2 + |3x + y - 2| \le 0$.

Аналогично предыдущему примеру при всех значениях x и y выражения $(x - 2y + 1)^2 \ge 0$ и $|3x + y - 2| \ge 0$. Поэтому сумма $(x - 2y + 1)^2 + |3x + y - 2| \ge 0$. Следовательно, данное неравенство выполняется только при тех значениях x и y, которые являются решением линейной системы уравнений $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0, \\ 3x + y - 2 = 0. \end{cases}$

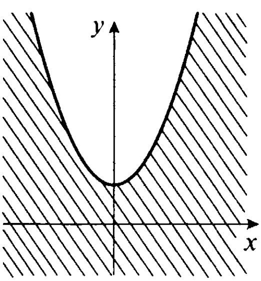
Решим эту систему, например, способом подстановки. Из второго уравнения выразим: $y = 2 - 3x$, и подставим в первое уравнение. Получаем $x - 2(2 - 3x) + 1 = 0$, или $x - 4 + 6x + 1 = 0$, или $7x = 3$, откуда $x = \frac{3}{7}$. Используя равенство $y = 2 - 3x$, найдем $y = 2 - 3 \cdot \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$. Итак, данное неравенство имеет единственное решение: $x = \frac{3}{7}$, $y = \frac{5}{7}$.

Достаточно часто на координатной плоскости приходится изображать множество точек, удовлетворяющих нелинейному неравенству.

Пример 10

На координатной плоскости изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y - 1 \le x^2$.

Запишем неравенство в виде $y \le x^2 + 1$ и построим параболу $y = x^2 + 1$ (этот график получается смещением графика $y = x^2$ на одну единицу вверх). Парабола разбивает точки плоскости на точки, расположенные над параболой, и точки, расположенные под параболой. Взяв в качестве контрольной точки начало координат (аналогично примеру 5), получаем верное неравенство $0 \le 1$. Поэтому данному неравенству удовлетворяют точки, расположенные ниже параболы и на параболе. Эти точки заштрихованы.



III. Задания на уроке и на дом

1. Аналитически решите неравенство:

а) $2x(4x - 2) - 4(2x^2 + 3x - 7(x - 2)) \ge 8 - 20x$;

б) $7x(x - 1) - (x(7x + 2) - 5(x + 3)) \le 12 - 3x$;

в) $3x(2x + 1) - x^2 - \left(5x(x - 3) + \frac{3x - 5}{5}\right) < 18 + 4x$;

г) $5x^2 - (x + 1)(x + 3) - \left(4x(x - 2) + \frac{4x - 2}{7}\right) < 2x + 3$.

Ответы: а) $x \in [2; +\infty)$; б) $x \in [3; +\infty)$; в) $x \in (-\infty; 5)$; г) $x \in (-\infty; 4)$.

2. При всех значениях параметра a решите неравенство:

а) $(a + 3)x \geq a^2 - 9$; г) $2x + 2 > a(a - x)$;

б) $(2 - a)x \geq a^2 - 4$; д) $(a - 1)^2x \leq a^2 - 1$;

в) $1 - x < a(a - x)$; е) $(a + 2)^2x \geq a^2 - 4$.

Ответы: а) при $a \in (-\infty; -3)$ $x \in (-\infty; a - 3]$, при $a = -3$ $x \in (-\infty; +\infty)$, при $a \in (-3; +\infty)$ $x \in [a - 3; +\infty)$;

б) при $a \in (-\infty; 2)$ $x \in [-a - 2; +\infty)$, при $a = 2$ $x \in (-\infty; +\infty)$, при $a \in (2; +\infty)$ $x \in (-\infty; -a - 2]$;

в) при $a \in (-\infty; 1)$ $x \in (a + 1; +\infty)$, при $a = 1$ $x \in \varnothing$, при $a \in (1; +\infty)$ $x \in (-\infty; a + 1)$;

г) при $a \in (-\infty; -2)$ $x \in (-\infty; a - 2)$, при $a = -2$ $x \in \varnothing$, при $a \in (-2; +\infty)$ $x \in (a - 2; +\infty)$ (указание: примеры *в*, *г* привести к виду, аналогичному виду примеров *а*, *б*);

д) при $a \neq 1$ $x \in \left(-\infty; \frac{a+1}{a-1}\right]$, при $a = 1$ $x \in (-\infty; +\infty)$;

е) при $a \neq -2$ $x \in \left[\frac{a-2}{a+2}; +\infty\right)$, при $a = -2$ $x \in (-\infty; +\infty)$.

3. При каких значениях параметра a уравнение:

а) $3x^2 - 2x + a = 0$ не имеет корней;

б) $2x^2 - 3x + 5a = 0$ имеет два различных корня;

в) $x^2 - (a + 4)x + 3x + 3 = 0$ имеет один корень, больший 6;

г) $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ имеет один отрицательный корень;

д) $ax^2 - 3x + 2 = 0$ имеет хотя бы один корень;

е) $3ax^2 - 4x + 1 = 0$ имеет два различных корня;

ж) $2x^2 - (a + 2)x + 3a - 12 = 0$ имеет хотя бы один отрицательный корень;

з) $3x^2 - (a + 3)x + 2a - 6 = 6$ имеет хотя бы один положительный корень?

Ответы: а) $a \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) $a \in \left(-\infty; \frac{9}{40}\right)$; в) $a \in (5; +\infty)$; г) $a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; д) $a \in \left(-\infty; \frac{9}{8}\right]$; е) $a \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{4}{3}\right)$; ж) $a \in (-\infty; 4)$; з) $a \in (-\infty; +\infty)$.

4. Решите неравенство:

а) $3|x - 2| + x^2 - 4x + 4 \leq 0$;

б) $2|x + 3| + 3x^2 + 18x + 27 \leq 0$;

в) $2(x - y + 1)^2 + 3|2x + y + 2| \leq 0$;

г) $3|2x - y + 3| + 5(3x + 2y + 1)^2 \leq 0$;

д) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 \leq 0$;

е) $4x^2 + y^2 - 4x + 4y + 5 \leq 0$.

Ответы: а) $x = 2$; б) $x = -3$; в) $x = -1$, $y = 0$; г) $x = -1$, $y = 1$; д) $x = 3$, $y = -1$; е) $x = \frac{1}{2}$, $y = -2$.

(Указание: в примерах *д*, *е* выделите полные квадраты суммы и разности величин.)

5. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $2x - 3y \geq 1$;
б) $3x + 2y \leq 4$;
в) $y - x^2 \geq 1$;
г) $y + x^2 \leq 2$;
д) $y > (x - 1)^2 + 2$;
е) $y < 2 - (x + 1)^2$;
ж) $y \geq x^2 + 2x$;
з) $y \leq -x^2 + 4x$;
и) $y \geq |x| - 2$;
к) $y < |x - 2|$;
л) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 \leq 1$;
м) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 4$.

(Указание: уравнение окружности с центром в точке A (a; b) и радиуса R имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.)

IV. Подведение итогов урока

Факультативный урок. Решение систем неравенств

Цель: рассмотреть решение некоторых типов систем линейных и нелинейных неравенств с одной и двумя переменными.

Планируемые результаты: научиться решать более сложные системы неравенств.

Тип урока: урок-исследование.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

План урока

1. Системы неравенств с одной переменной.
2. Системы неравенств с двумя переменными.

1. Системы неравенств с одной переменной

Во многих случаях приходится решать как системы линейных неравенств, так и системы нелинейных неравенств. К решению подобных систем сводятся неравенства с модулями. При этом полезно помнить, что

а) неравенство $|x| \leq a$ (по свойству модуля) равносильно двойному неравенству $-a \leq x \leq a$;

б) неравенство $|x| \geq a$ равносильно двум неравенствам (или совокупности неравенств): $x \leq -a$ и $x \geq a$.

Подчеркнем, что речь идет именно *о совокупности*, а не о системе неравенств.

Пример 1

Решим неравенство $|1 - 5x| \leq 2$.

Такое неравенство равносильно двойному неравенству $-2 \leq 1 - 5x \leq 2$. Решим его обычным способом. Получаем $-2 - 1 \leq -5x \leq 2 - 1$, или $-3 \leq -5x \leq 1$, откуда $\frac{3}{5} \geq x \geq -\frac{1}{5}$. Таким образом, решение данного неравенства $x \in \left[-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right]$.

Пример 2

Решим неравенство $|3x - 2| \geq 4$.

Данное неравенство равносильно совокупности неравенств (именно совокупности, а не системе) $\left[\begin{array}{l} 3x - 2 \leq -4, \\ 3x - 2 \geq 4. \end{array}\right.$ Решим каждое неравенство такой совокупности. Имеем $\left[\begin{array}{l} 3x \leq 2 - 4, \\ 3x \geq 2 + 4, \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} 3x \leq -2, \\ 3x \geq 6, \end{array}\right.$ откуда $\left[\begin{array}{l} x \leq -\frac{2}{3}, \\ x \geq 2. \end{array}\right.$ Решение такой совокупности и данного неравенства $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty)$.

Заметим, что *решением совокупности неравенств* (в отличие от системы неравенств) *является такое значение переменной, при которой выполняется хотя бы одно из неравенств.* Поэтому, чтобы найти решение совокупности неравенств (в отличие от системы неравенств), надо найти объединение множеств решений всех неравенств совокупности.

Часто к необходимости решения *систем неравенств* приводит исследование корней квадратного уравнения.

Пример 3

При каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2 + (a - 2)x - 2a^2 + 5a - 3 = 0$ принадлежат промежутку $[-3; 3]$?

Прежде всего найдем дискриминант данного квадратного уравнения: $D = (a - 2)^2 - 4(-2a^2 + 5a - 3) = a^2 - 4a + 4 + 8a^2 - 20a + {} + 12 = 9a^2 - 24a + 16 = (3a - 4)^2$ – и решим его: $x_{1,2} = \frac{2 - a \pm (3a - 4)}{2}$, т. е. $x_1 = a - 1$ и $x_2 = 3 - 2a$. Теперь потребуем, чтобы эти корни принадлежали промежутку [–3; 3]. Получаем систему линейных неравенств $\begin{cases} -3 \le a - 1 \le 3, \\ -3 \le 3 - 2a \le 3. \end{cases}$ Решим эту систему. Имеем $\begin{cases} -2 \le a \le 4, \\ -6 \le -2a \le 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} -2 \le a \le 4, \\ 0 \le a \le 3. \end{cases}$. Решение такой системы – промежуток [0; 3]. Кроме того, надо учесть, что уравнение может иметь не два, а один корень. В этом случае $D = 0$, т. е. $3a - 4 = 0$, откуда $a = \frac{4}{3}$. Итак, при $a \in \left[0; \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; 3\right]$ оба корня данного квадратного уравнения принадлежат промежутку [–3; 3].

Пример 4

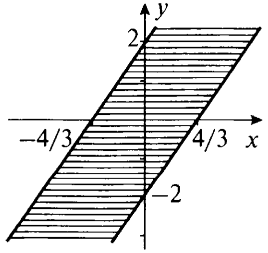
Рассмотрим уравнение предыдущего примера и потребуем, чтобы хотя бы один из корней принадлежал промежутку [–3; 3]. В этом случае вместо системы неравенств получим аналогичную совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} -3 \le a - 1 \le 3, \\ -3 \le 3 - 2a \le 3. \end{array}\right.$ Решив каждое неравенство, найдем: $\left[\begin{array}{l} -2 \le a \le 4, \\ 0 \le a \le 3. \end{array}\right.$ Решение этой совокупности – промежуток [–2; 4].

Итак, при $a \in [2; 4]$ хотя бы один из корней данного квадратного уравнения принадлежит промежутку [–3; 3].

2. Системы неравенств с двумя переменными

Пример 5

На координатной плоскости изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|3x - 2y| \le 4$.



Используя свойство модуля, запишем данное неравенство в виде двойного неравенства $-4 \le 3x - 2y \le 4$ и выразим из него y. Получаем $-4 - 3x \le -2y \le 4 - 3x$, откуда $\frac{4 + 3x}{2} \ge y \ge \frac{3x - 4}{2}$. Сначала построим две граничные линии: $y_1 = \frac{3x - 4}{2}$ и $y_2 = \frac{3x + 4}{2}$.

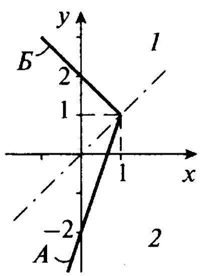
Они представляют собой две параллельные прямые. Эти прямые разбивают точки координатной плоскости на область, расположенную между ними, и область, расположенную за ними. Проверка показывает, что данному неравенству удовлетворяют точки, расположенные между прямыми (эти точки заштрихованы). Например, для начала координат (контрольная точка $x = 0$, $y = 0$) получаем, что данное неравенство $|3x - 2y| \le 4$ выполняется: $|3 \cdot 0 - 2 \cdot 0| \le 4$.

Пример 6

На координатной плоскости изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\max(3x - y; x + y) = 2$.

Прежде всего заметим, что запись «$\max(a; b)$» обозначает наибольшую (максимальную) из двух величин a и b. Для данного примера неизвестно, какая из величин $3x - y$ и $x + y$ больше. Поэтому необходимо рассмотреть два возникающих случая.

1) $3x - y \ge x + y$ (т. е. первая величина является наибольшей). По условию задачи тогда $3x - y = 2$. Таким образом, первый случай сводится к системе, состоящей из неравенства и уравнения: $\begin{cases} 3x - y \ge x + y, \\ 3x - y = 2, \end{cases}$ или $\begin{cases} x \ge y, \\ y = 3x - 2. \end{cases}$



Построим прямую $x = y$ (штрихпунктирная линия). Она разбивает все точки координатной плоскости на области *1* и *2*. Легко проверить, что неравенству $x \ge y$ отвечают точки области *1*. В этой области построим прямую $y = 3x - 2$ (луч A). Таким образом, данному случаю (данной системе) соответствует луч A.

2) $x + y > 3x - y$ (т. е. вторая величина является наибольшей). По условию задачи $x + y = 2$. Таким образом, второй случай также сводится к системе, состоящей из неравенства и уравнения: $\begin{cases} x + y > 3x - y, \\ x + y = 2, \end{cases}$ или $\begin{cases} y > x, \\ y = 2 - x. \end{cases}$ Неравенству $y > x$ отвечают точки области *2*. В этой области построим прямую $y = 2 - x$

(луч *Б*). Таким образом, данному случаю (данной системе) соответствует луч *Б*.

Итак, графиком уравнения $\max(3x - y;\ x + y) = 2$ являются лучи *А* и *Б*.

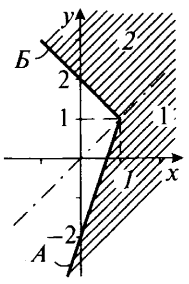
Теперь усложним рассмотренную задачу и разберем следующий пример.

***Пример** 7*

На координатной плоскости изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\max(3x - y;\ x + y) > 2$.

Подход к этой задаче аналогичен предыдущему. Также возникают два случая, каждый из которых приводит к системе, состоящей из двух неравенств.

1) В этом случае возникает система двух неравенств $\begin{cases} 3x - y \ge x + y, \\ 3x - y > 2, \end{cases}$ или $\begin{cases} x \ge y, \\ y < 3x - 2. \end{cases}$



Отличие от предыдущего примера состоит в том, что второе условие становится неравенством. Поэтому в области *1* строим множество точек, отвечающих неравенству $y < 3x - 2$. Эти точки расположены ниже луча *А* (точки заштрихованы).

2) В этом случае возникает также система двух неравенств $\begin{cases} x + y > 3x - y, \\ x + y > 2, \end{cases}$ или $\begin{cases} y > x, \\ y > 2 - x. \end{cases}$ Вновь отличие от предыдущего примера состоит в том, что второе условие становится неравенством. Поэтому в области *2* строим множество точек, отвечающих неравенству $y > 2 - x$. Эти точки расположены выше луча *Б* (точки заштрихованы).

Итак, графиком неравенства $\max(3x - y;\ x + y) > 2$ является множество заштрихованных точек. Точки прямых $y = 3x - 2$ и $y = 2 - x$ в график не входят, так как неравенство $\max(3x - y;\ x + y) > 2$ строгое.

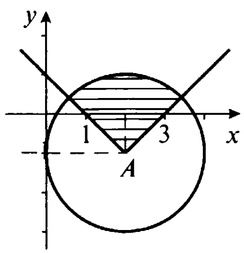
Рассмотрим теперь графическое решение других нелинейных систем неравенств.

Пример 8

На координатной плоскости изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 \le 0, \\ y > |x - 2| - 1. \end{cases}$$

Преобразуем сначала первое неравенство, выделив полные квадраты суммы и разности по переменным x и y. Получаем $(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y + 1) \le 0$, или $(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) \le 4$, или $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \le 2^2$. Будем рассматривать теперь систему неравенств $\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 \le 2^2, \\ y > |x - 2| - 1. \end{cases}$



Сначала построим график уравнения $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$. Это окружность с центром в точке A (2; –1) радиуса 2. Легко проверить, что неравенству $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \le 2^2$ соответствуют точки внутри и на границе построенной окружности (т. е. точки круга).

Теперь построим график функции $y = |x - 2| - 1$. Он получается из графика $y = |x|$ смещением на две единицы вправо и одну единицу вниз («галочка»). Неравенству $y > |x - 2| - 1$ отвечают точки, распложенные внутри ветвей этого графика. При этом точки зависимости $y = |x - 2| - 1$ в график не входят, так как неравенство строгое.

Таким образом, графиком данной системы неравенств являются точки кругового сектора (они заштрихованы).

III. Задания на уроке и на дом

1. Решите неравенство:

а) $|2x - 3| < 2$; в) $|5x - 1| \ge 3$; д) $|2x - 1| \ge x - 2$;

б) $|2 - 3x| \le 1$; г) $|4x - 2| > 6$; е) $|3 - x| > 3x - 1$.

Ответы: а) $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$; б) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; в) $\left(-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{5}; +\infty\right)$;

г) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; д) $\varnothing$; е) $(-\infty; 1)$.

2. При каких значениях параметра a:

а) оба корня уравнения $x^2 + (a - 3)x - 2a^2 + 6a - 4 = 0$ принадлежат промежутку $[-1; 2]$;

б) хотя бы один корень данного уравнения принадлежит промежутку $[-1; 2]$;

в) только один корень этого уравнения принадлежит промежутку $[-1; 2]$;

г) оба корня такого уравнения положительны;

д) корни отличаются в два раза?

Ответы: а) $\left[1; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{2}\right]$; б) $[0; 3]$; в) $[0; 1) \cup \left\{\frac{5}{3}\right\} \cup \left(\frac{5}{2}; 3\right]$; г) $(1; 2)$; д) $a = 1{,}5$ и $a = 1{,}8$.

3. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $|x - y| \le 2$;

б) $|2y + x| > 1$;

в) $\min(x + y; x - y) = 2$;

г) $\max(x + y; x - y) = 2$;

д) $\min(x + y; x - y) \le 2$;

е) $\min(x + y; x - y) \ge 2$;

ж) $\max(x + y; x - y) \le 2$;

з) $\max(x + y; x - y) \ge 2$;

и) $\begin{cases} y \le 3 - |x|, \\ y > |x|; \end{cases}$

к) $\begin{cases} y > |x - 2|, \\ y \le 5 - |x|; \end{cases}$

л) $\begin{cases} y > |x| - 2, \\ y \le 4 - x^2; \end{cases}$

м) $\begin{cases} y \ge (x - 2)^2 + 1, \\ y < 4 - x^2; \end{cases}$

н) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9, \\ y \ge 2; \end{cases}$

о) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4, \\ y > |x| - 2; \end{cases}$

п) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y \le 2, \\ y > -(x - 1)^2. \end{cases}$

IV. Подведение итогов урока

Факультативный урок. Зачетная работа по теме «Неравенства»

Цель: проверить знания учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика зачетной работы

По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно, у учащихся появляется свобода выбора задач. Все задания разбиты на три блока: А, В и С. Самые простые задачи находятся в блоке А, более сложные – в блоке В, еще сложнее – в блоке С. Каждая задача из блока А оценивается в 1 балл, из блока В – в 2 балла, из блока С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий отдельное занятие можно и не посвящать (решения задач можно вывесить на стенде). Для этого приводится разбор заданий.

III. Зачетная работа

А

1. Решите неравенство $3x + \frac{x}{2} \le 14$.

2. Решите неравенство $3x^2 - (x - 2)(3x + 1) > 0$.

3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 5x - 7 > 0, \\ 3x - 8 \le 0. \end{cases}$

4. При каких значениях x функция $y = 3x + 5$ принимает отрицательные значения?

5. Найдите целые решения неравенства $-2 \le 3x + 1 < 7$.

6. Длины сторон прямоугольника (в сантиметрах) удовлетворяют условиям $1{,}2 < a < 1{,}3$ и $2{,}7 < b < 2{,}8$. Оцените периметр прямоугольника.

7. При каких значениях a уравнение $3x + 2 = a$ имеет положительный корень?

В

8. Сравните числа $A = 234 \cdot 236$ и $B = 235^2$.

9. Решите неравенство $|2 - 3x| \le 7$.

10. Найдите область определения функции
$$y = \frac{3x - 2}{\sqrt{4x - 1}} + \sqrt{2x + 3}.$$

11. Решите неравенство $(5x^2 + 7)(3x + 2) \ge 0$.

С

12. Решите неравенство $\frac{8}{x - 2} > 2$.

13. Докажите неравенство $a^2 + 5 \ge 4(a - b - b^2)$.

14. В раствор объемом 8 л, содержащий 60% кислоты, вливают раствор, содержащий 20% кислоты. Сколько нужно влить

второго раствора в первый, чтобы смесь содержала кислоты не меньше 30% и не больше 40%?

IV. Разбор заданий

1. Умножим обе части неравенства $3x + \frac{x}{2} \leq 14$ на положительное число 2 (при этом знак неравенства сохраняется) и получим $6x + x \leq 28$ или $7x \leq 28$. Разделим обе части неравенства на положительное число 7 (знак неравенства сохраняется) и получим $x \leq 4$, т. е. $x \in (-\infty; 4]$.

Ответ: $(-\infty; 4]$.

2. В неравенстве $3x^2 - (x - 2)(3x + 1) > 0$ раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем $3x^2 - 3x^2 - x + 6x + 2 > 0$, или $5x > -2$. Разделим обе части на положительное число 5 (знак неравенства сохраняется) и найдем $x > -0{,}4$, т. е. $x \in (-0{,}4; +\infty)$.

Ответ: $(-0{,}4; +\infty)$.

3. В системе $\begin{cases} 5x - 7 > 0, \\ 3x - 8 \leq 0 \end{cases}$ решим каждое неравенство: $\begin{cases} 5x > 7, \\ 3x \leq 8 \end{cases}$ и $\begin{cases} x > \frac{7}{5}, \\ x \leq \frac{8}{3}. \end{cases}$ Получаем решение данной системы неравенств $\frac{7}{5} < x \leq \frac{8}{3}$, т. е. $x \in \left(\frac{7}{5}; \frac{8}{3}\right]$.

Ответ: $\left(\frac{7}{5}; \frac{8}{3}\right]$.

4. Если функция $y = 3x + 5$ принимает отрицательные значения, то выполняется неравенство: $3x + 5 < 0$, или $3x < -5$. Решение этого неравенства $x < -\frac{5}{3}$, т. е. $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right)$.

5. Сначала решим двойное неравенство $-2 \leq 3x + 1 < 7$. Вычтем из всех частей неравенства число 1 и получим $-3 \leq 3x < 6$. Разделим все части неравенства на положительное число 3 (при этом знаки неравенства сохраняются) и найдем $-1 \leq x < 2$, т. е. $x \in [-1; 2)$. Выпишем все целые числа, входящие в этот промежуток: -1; 0; 1.

Ответ: -1; 0; 1.

6. Периметр прямоугольника $P = 2(a + b)$. Оценим сначала сумму $a + b$. Для этого почленно сложим неравенства одного знака: $1{,}2 < a < 1{,}3$ и $2{,}7 < b < 2{,}8$ – и получим $3{,}9 < a +$

$+ b < 4{,}1$. Умножим все части этого неравенства на положительное число 2 (знаки неравенства сохраняются) и найдем: $7{,}8 < 2(a + b) < 8{,}2$, или $P \in (7{,}8;\ 8{,}2)$.

Ответ: $(7{,}8;\ 8{,}2)$.

7. Сначала решим уравнение $3x + 2 = a$. Получаем $3x = a - 2$, откуда $x = \frac{a-2}{3}$. Так как этот корень положительный, то получаем неравенство $\frac{a-2}{3} > 0$, или $a - 2 > 0$, откуда $a > 2$, т. е. $a \in (2; +\infty)$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

8. Запишем число A в виде $A = 234 \cdot 236 = (235 - 1)(235 + 1) = 235^2 - 1^2 = 235^2 - 1$. Тогда видно, что число A меньше числа $B = 235^2$. Итак, $A < B$.

Ответ: $A < B$.

9. Неравенство $|2 - 3x| \le 7$ равносильно двойному неравенству $-7 \le 2 - 3x \le 7$. Вычтем из всех частей неравенства число 2 и получим $-9 \le -3x \le 5$. Разделим все части неравенства на отрицательное число -3. При этом знаки неравенства меняются на противоположные. Получим $3 \ge x \ge -\frac{5}{3}$, т. е. $x \in \left[-\frac{5}{3}; 3\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{5}{3}; 3\right]$.

10. Область определения данной функции задается условиями: подкоренные выражения неотрицательны, и делить на нуль нельзя. Поэтому получаем систему неравенств $\begin{cases} 4x - 1 > 0, \\ 2x + 3 \ge 0. \end{cases}$ Решим каждое неравенство системы $\begin{cases} x > \frac{1}{4}, \\ x \ge -\frac{3}{2} \end{cases}$ и найдем решение: $x > \frac{1}{4}$, т. е. $x \in \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

11. В неравенстве $(5x^2 + 7)(3x + 2) \ge 0$ множитель $5x^2 + 7$ положительный при всех значениях x. Поэтому разделим обе части данного неравенства на этот множитель (при этом знак неравенства сохраняется) и получим равносильное неравенство $3x + 2 \ge 0$. Решение этого неравенства $x \ge -\frac{2}{3}$, т. е. $x \in \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

12. В неравенстве $\frac{8}{x-2} > 2$, очевидно, знаменатель положительный, т. е. $x - 2 > 0$, или $x > 2$. Умножим обе части данного неравенства на положительную величину $x - 2$. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем $8 > 2(x - 2)$, или $4 > x - 2$, откуда $6 > x$. Таким образом, $2 < x < 6$, или $x \in (2; 6)$.

Ответ: (2; 6).

13. Для доказательства неравенства $a^2 + 5 \geq 4(a - b - b^2)$ раскроем скобки, перенесем все члены в левую часть и выделим полные квадраты по переменным a и b. Получаем $a^2 + 5 - 4a + 4b + 4b^2 \geq 0$, или $(a^2 - 4a + 4) + (4b^2 + 4b + 1) \geq 0$, или $(a - 2)^2 + (2b + 1)^2 \geq 0$. Так как левая часть неравенства является суммой квадратов двух величин: $a - 2$ и $2b + 1$, то при всех a и b такое неравенство выполняется.

Ответ: доказано.

14. В растворе объемом 8 л, содержащем 60% кислоты, находится $\frac{8}{100} \cdot 60 = 4{,}8$ (л) чистой кислоты. Пусть добавили x (л) раствора, содержащего 20% кислоты. Тогда в этом растворе находится $\frac{x}{100} \cdot 20 = 0{,}2x$ (л) чистой кислоты. Посчитаем процентное содержание кислоты в смеси.

Количество чистой кислоты в смеси равно $4{,}8 + 0{,}2x$ (л). Объем смеси равен $8 + x$ (л). Тогда процентное содержание кислоты в смеси $P = \frac{4{,}8 + 0{,}2x}{8 + x} \cdot 100 = \frac{480 + 20x}{8 + x}$. По условию $30 \leq P \leq 40$. Получаем систему неравенств $\begin{cases} 30 \leq \frac{480 + 20x}{8 + x}, \\ \frac{480 + 20x}{8 + x} \leq 40. \end{cases}$ Так как величина $8 + x > 0$, то умножим каждое неравенство на эту величину. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем систему линейных неравенств: $\begin{cases} 240 + 30x \leq 480 + 20x, \\ 480 + 20x \leq 320 + 40x, \end{cases}$ или $\begin{cases} 10x \leq 240, \\ 160 \leq 20x, \end{cases}$ или $\begin{cases} x \leq 24, \\ 8 \leq x, \end{cases}$ откуда $8 \leq x \leq 24$.

Ответ: [8; 24] л.

V. Подведение итогов урока

Глава V
СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

§ 12. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЕ СВОЙСТВА

Уроки 84, 85. Определение степени с целым отрицательным показателем

Цель: ввести понятие степени с целым отрицательным показателем.

Планируемые результаты: научиться записывать маленькие числа в виде степени.

Тип уроков: уроки изучения нового материала.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

Окружающий нас мир очень разнообразен и качественно, и количественно. Приведем из справочника по физике сведения о массах двух физических тел: масса Солнца равна $1{,}985 \cdot 10^{33}$ г (для простоты $2 \cdot 10^{33}$ г) и масса электрона равна $9{,}108 \cdot 10^{-28}$ г (для простоты 10^{-27} г). Обозначение 10^{33} соответствует произведению тридцати трех множителей, каждый из которых равен 10. Давайте представим себе смысл записи 10^{-27}.

Последовательно запишем степени числа 10 с показателями 0, 1, 2, ... Получаем последовательность (ряд) чисел: 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ... В этой записи каждое предыдущее число меньше последующего в 10 раз. Учитывая такую закономерность, распространим нашу запись влево. Перед числом 10^0 надо написать $\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$, перед числом $\frac{1}{10^1}$ запишем число $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$ и т. д. Тогда получим последовательность (ряд) чисел: ..., $\frac{1}{10^3}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^1}$, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ...

Как уже было отмечено, закономерность этой последовательности чисел такова: показатель степени каждого предыдущего числа на 1 меньше показателя степени последующего числа. Поэтому по аналогии с числами, стоящими справа от числа 10^0, числа, стоящие слева от числа 10^0, записывают в виде степени числа 10 с отрицательным показателем. Тогда вместо $\frac{1}{10^1}$ пишут 10^{-1}, вместо $\frac{1}{10^2}$ пишут 10^{-2} и т. д.

Поэтому рассмотренную последовательность чисел: ..., $\frac{1}{10^3}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^1}$, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ... можно записать в виде: ..., 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ... Итак, 10^{-1} означает $\frac{1}{10^1}$, 10^{-2} означает $\frac{1}{10^2}$ и т. д. Такое правило справедливо для степеней с любыми основаниями (кроме нуля), поэтому можем сформулировать: если $a \neq 0$ и n – целое отрицательное число, то $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Пример 1

По определению степени с целым отрицательным показателем, найдем:

а) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$;

в) $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$;

г) $a^{-2}b^{-3} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^3} = \frac{1}{a^2b^3}$.

Отметим, что выражение 0^n при целом отрицательном n и при $n = 0$ не имеет смысла. При натуральном n выражение 0^n имеет смысл и его значение равно нулю.

Вернемся к началу этого урока. Масса электрона составляет примерно 10^{-27} (г) $= \frac{1}{10^{27}}$ (г) $= 0{,}\underbrace{000\ldots0}_{26\text{ нулей}}1$ (г). Попутно подчеркнем разнообразие нашего мира: масса Солнца отличается от массы электрона в $\frac{10^{33}}{10^{27}} = \frac{10^{33}}{\frac{1}{10^{27}}} = 10^{33} \cdot 10^{27} = 10^{60} = 1\underbrace{00\ldots0}_{60\text{ нулей}}$ (раз) (представить такое различие невозможно).

Приведенное определение позволяет решать более сложные задачи.

Пример 2

Вычислим значение выражения $2 \cdot 3^{-3} + 5 \cdot 9^{-1} - 4 \cdot 3^{-2}$.

Используем определение степени с целым отрицательным показателем и получим:

$$2 \cdot 3^{-3} + 5 \cdot 9^{-1} - 4 \cdot 3^{-2} = 2 \cdot \frac{1}{3^3} + 5 \cdot \frac{1}{9} - 4 \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{2}{27} + \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{5}{27}.$$

Пример 3

Упростим выражение $\left(y^{-1} + x^{-1}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{x^{-1}} + \dfrac{1}{y^{-1}}\right)^{-1}$.

Используя определение, получим:

$$\left(y^{-1} + x^{-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^{-1}} + \frac{1}{y^{-1}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{x}} + \frac{1}{\frac{1}{y}}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{x+y}{xy} \cdot (x+y)^{-1} = \frac{x+y}{xy} \cdot \frac{1}{x+y} = \frac{1}{xy}.$$

Пример 4

Упростим выражение $\left(\dfrac{1 + ax^{-1}}{a^{-1}x^{-1}} \cdot \dfrac{a^{-1}}{a^{-1}x - ax^{-1}}\right) : \dfrac{ax^{-1}}{x-a}$.

С учетом определения имеем:

$$\left(\frac{1 + ax^{-1}}{a^{-1}x^{-1}} \cdot \frac{a^{-1}}{a^{-1}x - ax^{-1}}\right) : \frac{ax^{-1}}{x-a} = \left(\frac{1 + \frac{a}{x}}{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{a}}{\frac{x}{a} - \frac{a}{x}}\right) : \frac{\frac{a}{x}}{x-a} =$$

$$= \left(\frac{x+a}{x} \cdot ax \cdot \frac{ax}{a\left(x^2 - a^2\right)}\right) : \frac{a}{a(x-a)} = \frac{(x+a) \cdot ax}{x^2 - a^2} \cdot \frac{x(x-a)}{a} = x^2.$$

III. Задания на уроках

№ 964 (а, в, д); 965 (а, в); 966; 968 (а, б, д); 969; 973; 976 (а–в); 980 (а, в).

IV. Контрольные вопросы

1. Дайте определение степени с целым отрицательным показателем.
2. На примерах поясните данное определение.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 964 (б, г, е); 965 (б, г); 967; 968 (г, е); 970; 974; 976 (г–е); 980 (б, г).

Уроки 86, 87. Свойства степени с целым показателем

Цель: изучить свойства степени с целым показателем и способы их использования при решении задач.

Планируемые результаты: уметь использовать свойства степени при решении задач.

Тип уроков: продуктивные уроки.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Представьте в виде дроби выражение $8x^3y^{-2}z^0$.

а) $\dfrac{8x^3}{y^2z}$; б) $\dfrac{8x^3z}{y^2}$; в) $\dfrac{8x^3}{y^2}$.

2. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-4}\cdot 3^{-2}$.

а) $\dfrac{5}{16}$; б) $\dfrac{3}{16}$; в) $\dfrac{1}{8}$.

3. Упростите выражение $(x^{-2}-y^{-2}):(x-y)$.

а) $\dfrac{x-y}{x^2y^2}$; б) $\dfrac{x+y}{x^2y^2}$; в) $-\dfrac{x+y}{x^2y^2}$.

Вариант 2

1. Представьте в виде дроби выражение $7x^0y^{-4}z^3$.

а) $\dfrac{7xz^3}{y^4}$; б) $\dfrac{7z^3}{y^4}$; в) $\dfrac{7z^3}{xy^4}$.

2. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{6}\right)^{-4}+\left(\dfrac{6}{\sqrt{2}}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$.

а) $\dfrac{5}{36}$; б) $\dfrac{5}{6}$; в) $\dfrac{17}{36}$.

3. Упростите выражение $(m^{-2}+n^{-2}):(m^2+n^2)$.

а) $\dfrac{1}{m^2n^2}$; б) $\dfrac{m^2+n^2}{m^2n^2}$; в) m^2n^2.

III. Работа по теме уроков

Наводящими вопросами (путем фронтального опроса) подведите учащихся к изучению этой темы. Для этого:

1. Попросите сформулировать свойства степени с натуральным показателем (вспомнить материал 7 класса).

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n = a^{m+n}$;
3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
4) $(ab)^n = a^n b^n$;
5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ (при $b \neq 0$).

2. На примерах предложите проверить, выполняются ли эти свойства в случае отрицательных целых показателей степени (с очевидным ограничением $a \neq 0$, $b \neq 0$).

Пример 1

а) $2^{-3} \cdot 2^{-2} = \dfrac{1}{2^3} \cdot \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{32} = \dfrac{1}{2^5} = 2^{-5} = 2^{-3-2}$ (свойство 1).

б) $(2 \cdot 3)^{-2} = \dfrac{1}{6^2} = \dfrac{1}{36}$ и $2^{-2} \cdot 3^{-2} = \dfrac{1}{2^2} \cdot \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{36}$, т. е. $(2 \cdot 3)^{-2} = 2^{-2} \cdot 3^{-2}$ (свойство 4).

На основании этих примеров можно высказать гипотезу, что свойства 1–5 выполняются и в случае степени с целым отрицательным показателем.

3. Предложите учащимся доказать, например, свойства 1 и 4 в случае степени с целым отрицательным показателем.

Пример 2

Докажем свойство 1, т. е. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (где m и n – целые отрицательные числа, a – любое число ($a \neq 0$)).

По определению степени с целым отрицательным показателем запишем: $a^m = \dfrac{1}{a^{-m}}$ и $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$. Числа $(-m)$ и $(-n)$ являются уже натуральными. Поэтому, используя свойство степеней с натуральными показателями, получаем

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

На заключительном этапе вновь было использовано определение степени с целым отрицательным показателем.

Пример 3

Докажем свойство 4, т. е. $(ab)^n = a^n b^n$ (где n – целое отрицательное число, a и b – любые числа ($a \neq 0$, $b \neq 0$)).

По определению степени с целым отрицательным показателем запишем: $(ab)^n = \dfrac{1}{(ab)^{-n}}$. Число $(-n)$ будет уже натуральным.

По свойству степеней с натуральными показателями имеем: $(ab)^n = \frac{1}{(ab)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = a^n \cdot b^n$. В конце снова было использовано определение степени с целым отрицательным показателем.

Таким образом, свойства 1–5 (для натуральных показателей степени) можно обобщить и на случай целых отрицательных показателей степени.

Пример 4

Преобразуем выражение:

а) $x^7 \cdot x^{-11}$; б) $x^{-6} \cdot x^{-8}$; в) $(x^2y^{-3})^{-4}$; г) $\left(\frac{x^3}{2y^2}\right)^{-2}$.

а) Учтем, что при умножении чисел с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются. Получаем

$$x^7 \cdot x^{-11} = x^{7-11} = x^{-4} = \frac{1}{x^4}.$$

б) При делении чисел с одинаковыми основаниями показатели степеней вычитаются. Имеем $x^{-6} \cdot x^{-8} = x^{-6\,-\,(-8)} = x^2$.

в) При возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают. При возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели перемножают. Получаем

$$(x^2y^{-3})^{-4} = (x^2)^{-4} \cdot (y^{-3})^{-4} = x^{-8}y^{12} = \frac{y^{12}}{x^8}.$$

г) При возведении в степень дроби возводят в эту степень ее числитель и знаменатель и результаты делят. При возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели перемножают. Имеем $\left(\frac{x^3}{2y^2}\right)^{-2} = \frac{(x^3)^{-2}}{(2y^2)^{-2}} = \frac{x^{-6}}{(2)^{-2}y^{-4}} = \frac{4y^4}{x^6}$.

Упомянутые свойства степеней используются и при решении более сложных задач.

Пример 5

Упростим выражение:

а) $(2a^3b^{-1})^{-2} \cdot (a^{-2}b^{-3})^3 : (a^{-4}b^{-5})^2$; б) $\frac{(a^{2m}b^{-m})^3}{(a^mb^{-m})^5} \cdot a^{-m}b^{2m}$.

Используем свойства степеней и получим

а) $(2a^3b^{-1})^{-2} \cdot (a^{-2}b^{-3})^3 : (a^{-4}b^{-5})^2 = \frac{2^{-2}a^{-6}b^2 \cdot a^{-6}b^{-9}}{a^{-8}b^{-10}} =$

$$= \frac{2^{-2}a^{-12}b^{-7}}{a^{-8}b^{-10}} = a^{-2}a^{-12+8}b^{-7+10} = 2^{-2}a^{-4}b^3 = \frac{b^3}{4a^4};$$

б) $$\frac{\left(a^{2m}b^{-m}\right)^3}{\left(a^m b^{-m}\right)^5}\cdot a^{-m}b^{2m} = \frac{a^{6m}b^{-3m}}{a^{5m}b^{-5m}}\cdot a^{-m}b^{2m} = a^{6m-5m}b^{-3m+5m}\times$$

$$\times a^{-m}b^{2m} = a^m b^{2m}\cdot a^{-m}b^{2m} = a^{m-m}b^{2m+2m} = a^0 b^{4m} = b^{4m}.$$

IV. Задания на уроках

№ 985 (а, г); 987; 990; 993 (в, д); 994 (е); 999 (а, д); 1005 (а, б); 1007 (в, г).

V. Контрольные вопросы

1. Напишите свойства степени с целым показателем.
2. Докажите любое свойство степени (по выбору).

VI. Творческие задания

Упростите выражение:

1) $(a^{2m}b^n)^{-3}$;
2) $(2a^{-2m}b^n)^{-2}$;
3) $(a^{2m}b^{2n})\cdot(a^n b^m)$;
4) $(a^m b^{-2n})\cdot(a^{-2m}b^n)$;
5) $(4a^m b^{-2n}) : (2a^{-m}b^n)$;
6) $(9a^{2m}b^{-n}) : (2a^m b^{-2n})$;
7) $(2a^{-m}b^n)^2\cdot(3a^m b^{-2n})^3$;
8) $(3a^{2m}b^{-n})^3\cdot(2a^{-m}b^{2n})^2$;
9) $(2a^m b^{-n})^2 : (3^{-1}a^{-m}b^{2n})^3$;
10) $(3a^{2m}b^{-n})^3 : (2^{-1}a^{-m}b^{-2n})^2$.

Ответы: 1) $a^{-6m}b^{-3n}$; 2) $\frac{1}{4}a^{4m}b^{-2n}$; 3) $a^{2m+n}b^{2n+m}$; 4) $a^{-m}b^{-n}$; 5) $2a^{2m}b^{-3n}$; 6) $3a^m b^n$; 7) $108a^m b^{-4n}$; 8) $108a^{4m}b^n$; 9) $108a^{5m}b^{-8n}$; 10) $108a^{8m}b^n$.

VII. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 985 (б, д); 988; 991; 993 (г, е); 994 (д); 999 (б, е); 1005 (в, г); 1007 (а, б).

Уроки 88, 89. Стандартный вид числа

Цель: получить навыки записи чисел в стандартном виде.

Планируемые результаты: научиться оценивать порядок чисел.

Тип уроков: уроки-практикумы.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Вычислите: $(3^2)^{-2} \cdot (3^{-3})^{-2} : 3^{-1}$.
2. Упростите выражение:

а) $(2a^{-3}b^2)^{-3} : (a^4b^{-2})^2$; б) $\dfrac{7^{n+1} - 7^{n-1}}{48}$; в) $\dfrac{x^7 + x^{12}}{x^{-3} + x^2}$.

Вариант 2

1. Вычислите: $(2^3)^{-2} \cdot (2^{-2})^{-2} : 2^{-2}$.
2. Упростите выражение:

а) $(3a^{-2}b^3)^{-2} : (a^3b^{-1})^2$; б) $\dfrac{6^{n+3} - 6^{n+1}}{35}$; в) $\dfrac{x^6 + x^{10}}{x^{-2} + x^2}$.

III. Работа по теме уроков

В окружающем нас мире встречаются объекты, характеристики которых измеряются как очень большими, так и очень малыми числами. Например, масса Земли выражается огромным числом: $598\underbrace{00\ldots0}_{25\text{ нулей}}$ (г), масса атома водорода – очень маленьким числом: $0{,}\underbrace{00\ldots0}_{20\text{ нулей}}17$ (г).

В таком (обычном десятичном) виде большие и малые числа неудобно запоминать (при характеристике физических объектов), читать и записывать, неудобно выполнять над ними какие-либо действия. Поэтому принято записывать число L в виде $L = a \cdot 10^n$, где n – целое число. Например, $187\,000 = 0{,}187 \cdot 10^6$ или $187\,000 = 18{,}7 \cdot 10^4$ и т. д. Для удобства сравнения принято числа записывать единообразно. Для этого при записи числа L выбирают множитель a в промежутке $1 \le a < 10$. Например: $187\,000 = 1{,}87 \cdot 10^5$, при этом множитель $1 \le 1{,}87 < 10$.

Итак, *стандартным видом числа* α *называют его запись в виде* $a \cdot 10^n$ *(где* $1 \le a < 10$ *и* n *– целое число). Число* n *называют порядком числа* α.

Пример 1

В стандартном виде масса Земли составляет $598\underbrace{00\ldots0}_{25\text{ нулей}}$ г $= 5{,}98 \cdot 10^{27}$ г, масса атома водорода равна $0{,}\underbrace{00\ldots0}_{20\text{ нулей}}17$ г $= 1{,}7 \cdot 10^{-21}$ г.

Таким образом, порядок числа, выражающего в граммах массу Земли, равен 27, а порядок числа, выражающего в граммах массу атома водорода, равен –21. Заметим, что различие в массах Земли и атома водорода составляет 48 порядков, т. е. масса Земли больше массы атома водорода в $10^{48} = 1\underbrace{00\ldots0}_{48\text{ нулей}}$ раз.

Порядок числа дает представление о его величине (т. е. о том, насколько велико или мало это число). Например, если порядок числа α равен 2, то само число α находится в промежутке $100 \le \alpha < 1000$. Если порядок числа α равен -3, то само число α находится в промежутке $0{,}001 \le \alpha < 0{,}01$. Большой положительный порядок показывает, что число очень велико. Большой по модулю отрицательный порядок показывает, что число очень мало.

Пример 2

Представим в стандартном виде число $\alpha = 387\,000$.

В числе α поставим запятую так, чтобы в целой части оказалась одна цифра. Получаем 3,87. Отделив запятой пять цифр справа, мы уменьшили число α в 10^5 раз. Поэтому число α больше числа 3,87 в 10^5 раз. Тогда имеем $\alpha = 3{,}87 \cdot 10^5$.

Пример 3

Представим в стандартном виде число $\alpha = 0{,}00182$.

В числе α переставим запятую так, чтобы в целой части оказалась одна отличная от нуля цифра. В результате получим 1,82. Переставив запятую на три знака вправо, мы увеличили число α в 10^3 раз. Поэтому число α меньше числа 1,82 в 10^3 раз. Тогда число $\alpha = 1{,}82 : 10^3 = 1{,}82 \cdot \frac{1}{10^3} = 1{,}82 \cdot 10^{-3}$.

Записав числа в стандартном виде, с ними можно выполнять все арифметические действия.

Пример 4

а) Сложим числа $1{,}8 \cdot 10^3$ и $1{,}2 \cdot 10^2$. Получаем

$$1{,}8 \cdot 10^3 + 1{,}2 \cdot 10^2 = 18 \cdot 10^2 + 1{,}2 \cdot 10^2 = 19{,}2 \cdot 10^2 = 1{,}92 \cdot 10^3.$$

б) Вычтем те же числа. Имеем

$$1{,}8 \cdot 10^3 - 1{,}2 \cdot 10^2 = 18 \cdot 10^2 - 1{,}2 \cdot 10^2 = 16{,}8 \cdot 10^2 = 1{,}68 \cdot 10^3.$$

в) Умножим эти же числа. Получаем

$$\left(1{,}8 \cdot 10^3\right) \cdot \left(1{,}2 \cdot 10^2\right) = (1{,}8 \cdot 1{,}2) \cdot \left(10^3 \cdot 10^2\right) = 2{,}16 \cdot 10^5.$$

г) Наконец, разделим эти числа. Имеем

$$\left(1{,}8 \cdot 10^3\right) : \left(1{,}2 \cdot 10^2\right) = \frac{1{,}8 \cdot 10^3}{1{,}2 \cdot 10^2} = \frac{1{,}8}{1{,}2} \cdot \frac{10^3}{10^2} = 1{,}5 \cdot 10^1.$$

При этом результаты вычислений также записаны в стандартном виде.

IV. Задания на уроках

№ 1013 (а, в); 1014 (а, д); 1016 (а, в, д); 1017; 1018 (а, б); 1020 (а); 1022.

V. Контрольные вопросы

1. Как записать число α в стандартном виде?
2. Как определить порядок числа α?

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 1013 (б, г); 1014 (б, е); 1016 (б, г, е); 1018 (в, г); 1020 (б); 1023.

Урок 90. Контрольная работа № 9 по теме «Степень с целым показателем»

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в 6 вариантах различной сложности (варианты 1, 2 самые простые, варианты 3, 4 сложнее и варианты 5, 6 самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую свободу выбора учащимся. При таких же критериях оценки за решение задач вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла, вариантов 5, 6 – 1 балл (т. е. оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач).

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимися (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Упростите выражение:

а) $3^7 \cdot 3^{-4} : 3^2$; б) $1{,}5a^3b^{-2} \cdot 2{,}4a^{-1}b^3$; в) $\left(\frac{2}{3}a^{-4}b^{-3}\right)^{-2}$.

2. Выразите:

а) $2{,}5 \cdot 10^2$ т в граммах; б) $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ км в сантиметрах.

3. Запишите число $a = 27{,}34 \cdot 10^5$ в стандартном виде и укажите его порядок.

4. Порядок числа a равен 8. Определите порядок числа $\frac{a}{100}$.

5. Сократите дробь $\frac{x^{-2} + x^{-5}}{x^{-6} + x^{-3}}$.

6. Постройте график функции $y = \left(\frac{1}{2x - 1}\right)^{-1}$.

Вариант 2

1. Упростите выражение:

а) $5^8 \cdot 5^{-4} : 5^3$; б) $2{,}1a^4b^{-3} \cdot 1{,}2a^{-2}b^5$; в) $\left(\frac{4}{3}a^{-3}b^{-5}\right)^{-2}$.

2. Выразите:

а) $4{,}7 \cdot 10^{-5}$ т в граммах; б) $3{,}7 \cdot 10^3$ км в сантиметрах.

3. Запишите число $a = 384{,}5 \cdot 10^6$ в стандартном виде и укажите его порядок.

4. Порядок числа a равен 7. Определите порядок числа $\frac{a}{1000}$.

5. Сократите дробь $\frac{x^{-7} + x^{-3}}{x^{-2} + x^{-6}}$.

6. Постройте график функции $y = \left(\frac{1}{2 - 3x}\right)^{-1}$.

Вариант 3

1. Упростите выражение $1{,}6x^{-1}y^{12} \cdot 5x^3y^{-11}$ и найдите его значение при $x = -0{,}2$ и $y = 0{,}7$.

2. Порядок числа a равен -6, порядок числа b равен 8. Определите порядок числа ab.

3. Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{1}{25} \cdot 5^{16} \cdot (5^{-3})^4}$.

4. Сократите дробь $\frac{21^n}{3^{n-1} \cdot 7^{n+2}}$, если n — целое число.

5. Упростите выражение $\left(\frac{9}{7}\frac{a^{-2}}{b^{-1}}\right)^{-2} \cdot \frac{3}{49}a^{-2}b$.

6. Постройте график функции $y = \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)^{-1}$.

Вариант 4

1. Упростите выражение $\frac{5}{6}x^{-3}y^3 \cdot 30x^3y^{-4}$ и найдите его значение при $x = 127$ и $y = \frac{1}{5}$.

2. Порядок числа a равен –4, порядок числа b равен 9. Определите порядок числа ab.

3. Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{1}{32}\cdot 2^{21}\cdot(2^{-4})^3}$.

4. Сократите дробь $\frac{35^n}{5^{n+2}\cdot 7^{n-1}}$, если n – целое число.

5. Упростите выражение $\left(\frac{3}{5}\frac{a^{-3}}{b^{-2}}\right)^{-2}\cdot\frac{9}{5}a^{-4}b^2$.

6. Постройте график функции $y=\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{-1}$.

Вариант 5

1. Сравните значения выражений $2^{-2}+3^{-2}$ и 5^{-2}.

2. Упростите выражение $\left(\frac{a}{x}\left(\frac{x}{a-2x}\right)^{-1}-\left(\frac{x}{a-x}\right)^{-2}\right)^{-5}$.

3. Решите уравнение $2x^{-2}+3x^{-1}+1=0$.

4. Решите неравенство $\left(\frac{3}{4x-2}\right)^{-1}\le 2$.

5. Сократите дробь $\frac{x^4+2x^6+x^7}{2+x+x^{-2}}$.

6. Упростите выражение $\frac{x^{4n+1}y^{2m-1}}{x^{3n+1}y^{m-1}}$ (n, m – целые числа).

Вариант 6

1. Сравните значения выражений $3^{-2}+4^{-2}$ и 7^{-2}.

2. Упростите выражение $\left((a+x)\left(\frac{x}{a-x}\right)^{-1}-a^2x^{-1}\right)^{-3}$.

3. Решите уравнение $3x^{-2}-5x^{-1}+2=0$.

4. Решите неравенство $\left(\frac{2}{3x-4}\right)^{-1}\le 3$.

5. Сократите дробь $\frac{x^3+3x^5+x^6}{3+x+x^{-2}}$.

6. Упростите выражение $\frac{x^{5m+2}y^{3n-2}}{x^{2m+2}y^{n-2}}$ (n, m – целые числа).

IV. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи	Итоги			
	+	±	–	∅
1	5	1	1	1
2				
...				
6				

Обозначения:

+ (число решивших задачу правильно или почти правильно);
± (число решивших задачу со значительными погрешностями);
– (число не решивших задачу);
∅ (число не решавших задачу).

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими их).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям и разобрать наиболее трудные варианты).

V. Разбор задач (ответы и решения)

Вариант 1

1. а) 3; б) $3{,}6a^2b$; в) $\frac{9}{4}a^8b^6$.
2. а) $2{,}5 \cdot 10^8$ г; б) 1,8 см.
3. $2{,}734 \cdot 10^6$, шестой порядок.
4. 6.
5. x.
6. График $y = 2x - 1$ $\left(x \neq \frac{1}{2}\right)$.

Вариант 2

1. а) 5; б) $2{,}52a^2b^2$; в) $\frac{9}{16}a^6b^{10}$.
2. а) 47 г; б) $3{,}7 \cdot 10^8$ см.
3. $3{,}845 \cdot 10^8$, восьмой порядок.
4. 4.
5. x^{-1}.
6. График $y = 2 - 3x$ $\left(x \neq \frac{2}{3}\right)$.

Вариант 3

1. $8x^2y$, 0,224.
2. Второй или третий порядок.
3. 5.
4. $\frac{3}{49}$.

5. $\frac{a^2}{27b}$.

6. График $y = x^2 - 1$ $(x \neq \pm 1)$.

Вариант 4

1. $\frac{25}{y}$, 125.

2. Пятый или шестой порядок.

3. 4.

4. $\frac{7}{25}$.

5. $\frac{5a^2}{b^2}$.

6. График $y = 1 - x^2$ $(x \neq \pm 1)$.

Вариант 5

1. Используя понятие степени с отрицательным показателем, найдем значения выражений: $2^{-2} + 3^{-2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}$ и $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$. Так как $\frac{13}{36} > \frac{1}{25}$, то $2^{-2} + 3^{-2} > 5^{-2}$.

Ответ: $2^{-2} + 3^{-2} > 5^{-2}$.

2. Учтем понятие степени с отрицательным показателем. Получим:

$$\left(\frac{a}{x}\left(\frac{x}{a-2x}\right)^{-1} - \left(\frac{x}{a-x}\right)^{-2}\right)^{-5} = \left(\frac{a}{x} \cdot \frac{a-2x}{x} - \frac{(a-x)^2}{x^2}\right)^{-5} =$$

$$= \left(\frac{a^2 - 2x - (a-x)^2}{x^2}\right)^{-5} = \left(-\frac{x^2}{x^2}\right)^{-5} = (-1)^{-5} = \frac{1}{(-1)^5} = -1.$$

Ответ: -1.

3. Используем понятие степени с отрицательным показателем. Тогда уравнение $2x^{-2} + 3x^{-1} + 1 = 0$ имеет вид $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} + 1 = 0$. Умножим все члены уравнения на x^2 и получим квадратное уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = -2$ и $x_2 = -1$.

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.

4. Учтем, что $4x - 2 \neq 0$, т. е. $x \neq \frac{1}{2}$. Неравенство имеет вид $\frac{4x-2}{3} \leq 2$, или $4x - 2 \leq 6$, или $4x \leq 8$, откуда $x \leq 2$. Запишем ответ в виде $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right]$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right]$.

5. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители. Вынесем за скобки в числителе x^4, в знаменателе – x^{-2}. Получаем

$$\frac{x^4 + 2x^6 + x^7}{2 + x + x^{-2}} = \frac{x^4\left(1 + 2x^2 + x^3\right)}{x^{-2}\left(2x^2 + x^3 + 1\right)} = \frac{x^4}{x^{-2}} = x^6.$$

Ответ: x^6.

6. Учитывая свойства степеней, получим

$$\frac{x^{4n+1}y^{2m-1}}{x^{3n+1}y^{m-1}} = x^{4n+1-(3n+1)}y^{2m-1-(m-1)} = x^n y^m.$$

Ответ: $x^n y^m$.

Вариант 6

1. Используя понятие степени с отрицательным показателем, найдем значения выражений: $3^{-2} + 4^{-2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{25}{144}$ и $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$. Так как $\frac{25}{144} > \frac{1}{49}$, то $3^{-2} + 5^{-2} > 7^{-2}$.

Ответ: $3^{-2} + 5^{-2} > 7^{-2}$.

2. Учтем понятие степени с отрицательным показателем. Получим

$$\left((a + x)\left(\frac{x}{a - x}\right)^{-1} - a^2x^{-1}\right)^{-3} = \left((a + x)\cdot\frac{a - x}{x} - \frac{a^2}{x}\right)^{-3} =$$

$$= \left(\frac{(a + x)(a - x) - a^2}{x}\right)^{-3} = \left(-\frac{x^2}{x}\right)^{-3} = (-x)^{-3} = \frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3}.$$

Ответ: $-\frac{1}{x^3}$.

3. Используем понятие степени с отрицательным показателем. Тогда уравнение $3x^{-2} - 5x^{-1} + 2 = 0$ имеет вид $\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x} + 2 = 0$. Умножим все члены уравнения на x^2 и получим квадратное уравнение $2x^2 - 5x + 3 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 1$ и $x_2 = 1{,}5$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}5$.

4. Учтем, что $3x - 4 \neq 0$, т. е. $x \neq \frac{4}{3}$. Неравенство имеет вид $\frac{3x - 4}{2} \leq 3$, или $3x - 4 \leq 6$, или $3x \leq 10$, откуда $x \leq \frac{10}{3}$. Запишем ответ в виде $x \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; \frac{10}{3}\right]$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; \frac{10}{3}\right]$.

5. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители. Вынесем за скобки в числителе x^3, в знаменателе – x^{-2}. Получаем

$$\frac{x^3 + 3x^5 + x^6}{3 + x + x^{-2}} = \frac{x^3\left(1 + 3x^2 + x^3\right)}{x^{-2}\left(3x^2 + x^3 + 1\right)} = \frac{x^3}{x^{-2}} = x^5.$$

Ответ: x^5.

6. Учитывая свойства степеней, получим

$$\frac{x^{5m+2}y^{3n-2}}{x^{2m+2}y^{n-2}} = x^{5m+2-(2m+2)}y^{3n-2-(n-2)} = x^{3m}y^{2n}.$$

Ответ: $x^{3m}y^{2n}$.

VI. Подведение итогов урока

§ 13. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

Уроки 91, 92. Сбор и группировка статистических данных

Цель: дать представление о сборе и обработке статистической информации.

Планируемые результаты: знать основные статистические характеристики.

Тип уроков: уроки изучения нового материала.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

XXI в. не случайно называют веком информации. Буквально за несколько последних лет появились сверхмощные компьютеры, различные поисковые системы, разрабатываются и совершенствуются методики обработки информации. Задача статистики – *сбор, отражение и обработка информации.*

При изучении общественных и социально-экономических явлений, природных процессов, физических экспериментов и т. д. проводят специальные статистические исследования. Всю совокупность изучаемых явлений или объектов называют *генеральной совокупностью.* Однако очень часто охватить генеральную совокупность или слишком трудно, или даже невозможно (например, определение рейтинга министров Правительства Российской Федерации на основании мнения всех россиян). Поэтому основным методом статистических исследований является так называемый *выборочный метод*.

Суть его в том, что из генеральной совокупности для анализа выбирают сравнительно небольшое конечное множество элементов, называемое *выборочной совокупностью* (*выборкой*). Эти элементы изучают, выявляют различные характеристики и закономерности. Полученные результаты переносят на всю генеральную совокупность. При этом выборка должна быть представительной (или репрезентативной), т. е. достаточной по объему и отражающей типичные особенности изучаемой генеральной совокупности.

Пример 1

Проводятся выборы мэра города, которые требуют больших организационных усилий и финансовых затрат. Для их оптимизации надо представлять численность избирателей. В городе проживают 300 тыс. жителей, обладающих избирательным правом. Перед выборами провели выборочный опрос, чтобы оценить явку избирателей. Из 2000 опрошенных 780 человек заявили, что придут на выборы.

Данные выборки показывают, что участие в выборах примет $\frac{780}{2000} = \frac{39}{100}$ (часть) избирателей. Тогда $300\,000 \cdot \frac{39}{100} = 117\,000$ (избирателей) в городе придут на участок.

Для систематизации и анализа статистических данных их по какому-нибудь признаку делят на группы и результаты сводят в таблицы.

Пример 2

В городской математической олимпиаде участвовали 100 школьников, которые получили различное число баллов (см. таблицу). В верхней строке приведено число баллов, в нижней строке – число участников, их набравших (так называемая *частота* появления данного числа баллов). Такую таблицу называют *таблицей частот*.

Число баллов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число участников (частота)	2	3	8	12	27	20	14	7	4	3

Обсудим основные статистические характеристики этого примера: среднее арифметическое, размах, моду, медиану.

Среднее арифметическое – отношение общего числа баллов к количеству участников: $(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 27 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 14 + 8 \cdot 7 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 3) : 100 = (2 + 6 + 24 + 48 + 135 + 120 + 98 + 56 + 36 + 30) : 100 = 555 : 100 = 5{,}55$.

Размах – разность между наибольшим и наименьшим числами набранных баллов: $10 - 1 = 9$.

Мода – наиболее часто встречающееся число баллов, т. е. 5.

Упорядочим набранное число баллов участниками олимпиады (в порядке возрастания баллов):

1, 1, 2, 2, 2, ..., 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10.

В середине этого ряда (на пятидесятом и пятьдесят первом месте) находятся одинаковые числа 5. Поэтому медиана равна полусумме этих чисел, т. е. $\frac{5+5}{2} = 5$.

Иногда в таблице для каждого данного указывают не частоту, а отношение частоты к общему числу данных в ряду. Это отношение, выраженное в процентах, называют *относительной частотой*, а саму таблицу – *таблицей относительных частот*. Так как в нашем случае было 100 участников олимпиады, то таблица относительных частот такая же, как и приведенная таблица частот.

Если в ряду имеется большое число данных и одинаковые значения встречаются редко, то таблицы частот или относительных частот становятся громоздкими. В таких случаях для представления и анализа данных строят интервальный ряд. Для этого разность между наибольшим и наименьшим значениями делят на несколько равных частей (обычно 5–10) и, округляя полученный результат, определяют длину интервала. За начало первого интервала выбирают наименьшее данное или ближайшее к нему целое число, его не превосходящее. Для каждого интервала указывают число данных, попадающих в этот интервал. При этом граничное число обычно считают относящимся к последующему интервалу.

Пример 3

При испытаниях 100 датчиков давления изучали продолжительность их безотказной работы (в часах). По результатам составили таблицу.

Продолжительность работы, ч	До 20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120	120–140	140–160
Частота	2	5	9	21	24	28	8	3

Теперь составим новую таблицу частот, заменяя каждый интервал числом, которое является серединой интервала.

Продолжительность работы, ч	10	30	50	70	90	110	130	150
Частота	2	5	9	21	24	28	8	3

Найдем среднее время работы датчиков:

$(10 \cdot 2 + 30 \cdot 5 + 50 \cdot 9 + 70 \cdot 21 + 90 \cdot 24 + 110 \cdot 28 + 130 \cdot 8 + 150 \cdot 3) : 100 = (20 + 150 + 450 + 1470 + 2160 + 3080 + 1040 + 450) : 100 = 8820 : 100 = 88{,}2$ часа.

III. Задания на уроках

№ 1028; 1030; 1031; 1034; 1036.

IV. Контрольные вопросы

1. Основные задачи статистики.
2. Понятие генеральной совокупности.
3. Выборочная совокупность.
4. Среднее арифметическое ряда чисел.
5. Размах ряда чисел.
6. Мода ряда чисел.
7. Медиана ряда чисел.

V. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 1029; 1032; 1033; 1035; 1037.

Уроки 93, 94. Наглядное представление статистической информации

Цель: научиться наглядно представлять статистические данные.

Планируемые результаты: уметь использовать диаграммы для представления данных.

Тип уроков: урок-лекция, урок общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Понятие среднего арифметического ряда чисел.

2. Приведен рост (в сантиметрах) пяти человек: 163, 183, 172, 180, 172. Найдите среднее, размах, моду, медиану этого ряда чисел.

Вариант 2

1. Понятие моды ряда чисел.

2. Приведен рост (в сантиментах) пяти человек: 187, 162, 171, 162, 183. Найдите среднее, размах, моду, медиану этого ряда чисел.

III. Работа по теме уроков

Для наглядного представления статистических данных применяют различные способы их изображения.

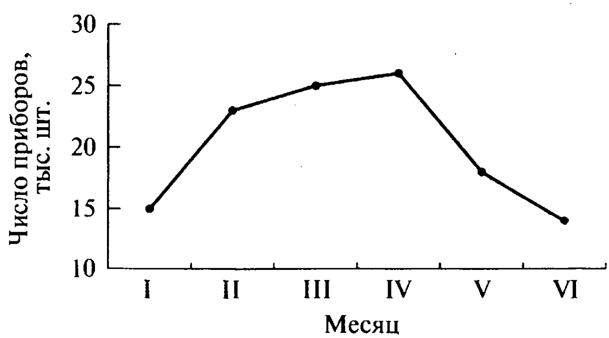
При анализе динамики изменения данных во времени обычно используют линейные или столбчатые диаграммы.

Пример 1

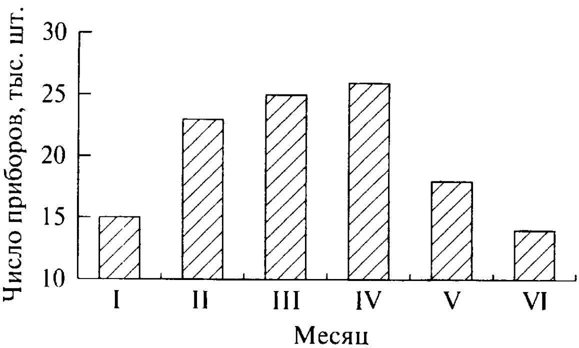
В таблице приведены данные о производстве приборов заводом в первом полугодии (по месяцам).

Месяц	I	II	III	IV	V	VI
Число приборов, тыс. шт.	15	23	25	26	18	14

Представим эти данные с помощью так называемой *линейной диаграммы* (*полигона*). Для ее построения отмечают точки, абсциссами которых служат моменты времени, ординатами – соответствующие им статистические данные. Соединив последовательно эти точки отрезками, получают ломаную линейную диаграмму.



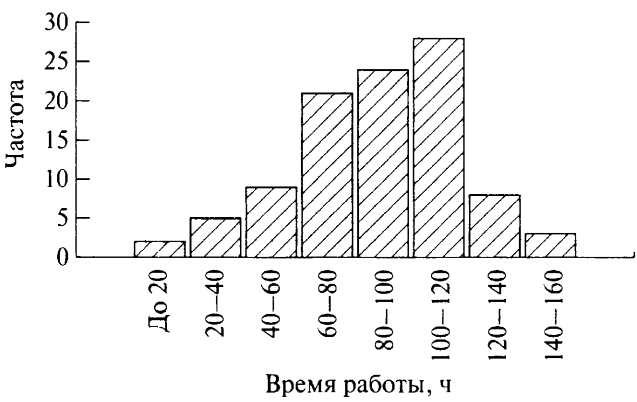
Эту же информацию можно отразить и с помощью *столбчатой диаграммы*. Она состоит из 6 прямоугольников, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга. Равные основания прямоугольников выбирают произвольно, а высота каждого (при выбранном масштабе) равна числу произведенных приборов.



Интервальные ряды данных удобно изображать с помощью *гистограмм*. Гистограмма представляет собой ступенчатую фигуру (столбчатую диаграмму), составленную из сомкнутых прямоугольников. Основание каждого прямоугольника равно длине интервала, а высота – частоте или относительной частоте. В гистограмме (в отличие от обычной столбчатой диаграммы) основания прямоугольников выбирают не произвольно, а строго определенной длины интервала.

Пример 2

Построим гистограмму на основе данных, представленных в примере 3 предыдущего урока.



Заметим, что сумма высот всех восьми прямоугольников равна общей численности исследуемой совокупности (т. е. 100 датчиков).

Для наглядного изображения соотношения между частями исследуемой совокупности удобно использовать *круговую диаграмму*.

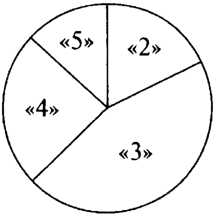
Пример 3

В таблице приведено распределение оценок за контрольную работу по алгебре.

Оценка	«2»	«3»	«4»	«5»
Относительная частота, %	18	45	24	13

Так как 360° : 100 = 3,6°, то одному проценту соответствует центральный угол, равный 3,6°. Учитывая это, определим для каждой группы соответствующий центральный угол: 3,6° · 18 = 64,8°, 3,6° · 45 = 162°, 3,6° · 24 = 86,4°, 3,6° · 13 = 46,8°.

Разбив круг на секторы, получим круговую диаграмму.



IV. Задания на уроках

№ 1042; 1044; 1046; 1049; 1050; 1052; 1055.

V. Контрольные вопросы

1. Виды диаграмм.
2. Как строить линейную диаграмму (полигон)?
3. Построение столбчатой диаграммы.
4. Как строить гистограмму?
5. Построение круговой диаграммы.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 1043; 1045; 1047; 1048; 1051; 1053; 1054; 1056.

Факультативный урок. Зачетная работа по теме «Степень с целым показателем»

Цель: проверить знания учащихся по теме.

Тип урока: урок контроля, оценки и коррекции знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика зачетной работы

По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно, у учащихся появляется свобода выбора задач. Все задания разбиты на три блока: А, В и С. Самые простые задачи находятся в блоке А, более сложные – в блоке В, еще сложнее – в блоке С. Каждая задача из блока А оценивается в 1 балл, из блока В – в 2 балла, из блока С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий отдельное занятие можно и не посвящать (решения задач можно вывесить на стенде). Для этого приводится разбор заданий.

III. Зачетная работа

А

1. Выразите $3{,}4 \cdot 10^{-8}$ км в сантиметрах.

2. Представьте выражение $5^n \cdot 25^{2n} \cdot 125^{1-n}$ (n – целое число) в виде степени с основанием 5.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{(3^{-2})^3 \cdot 81^2}{27^2}$.

4. Упростите выражение $1{,}3a^{-3}b^2 \cdot 5a^2b^{-4}$.

5. Сократите дробь $\dfrac{3x^{-1} + x^{-2}}{x^{-4} + 3x^{-3}}$.

6. Решите неравенство $\left(\dfrac{1}{3x-2}\right)^{-1} \geq 2$.

7. Сравните значения выражений $2^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 5^{-4}$ и 30^{-4}.

В

8. Найдите значение выражения $(2^{-1} + 3^{-1})^{-2}$.

9. Упростите выражение $(0{,}25x^{-4}y^{-3})^2 \cdot \left(\dfrac{x^{-3}}{4y^2}\right)^{-3}$.

10. Выполните действия: $a^2b^2(a^{-2} - b^{-2})$.

11. Постройте график функции $y = \left(\dfrac{2}{3x-2}\right)^{-1}$.

С

12. Найдите значение выражения $\left(2+\sqrt{5}\right)^{-2} + \left(2-\sqrt{5}\right)^{-2}$.

13. Упростите выражение $\dfrac{3^{2n}+1}{3^{-2n}+1}$.

14. Постройте график функции $y = \left(\dfrac{1}{|x|-1}\right)^{-1}$.

IV. Разбор заданий

1. Учтем, что 1 км = 10^3 м = $10^3 \cdot 10^2$ см = 10^5 см. Тогда $3{,}4 \cdot 10^{-8}$ км = $3{,}4 \cdot 10^{-8} \cdot 10^5$ см = $3{,}4 \cdot 10^{-3}$ см.

Ответ: $3{,}4 \cdot 10^{-3}$ см.

2. Учтем свойства степени и получим: $5^n \cdot 25^{2n} \cdot 125^{1-n} = 5^n \cdot (5^2)^{2n} \cdot (5^3)^{1-n} = 5^n \cdot 5^{4n} \cdot 5^{3-3n} = 5^{2n+3}$.

3. Используем свойства степени и найдем

$$\frac{(3^{-2})^3 \cdot 81^2}{27^2} = \frac{(3^{-2})^3 \cdot (3^4)^2}{(3^3)^2} = \frac{3^{-6} \cdot 3^8}{3^6} = \frac{3^2}{3^6} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}.$$

Ответ: $\frac{1}{81}$.

4. Учитывая свойства степеней, получим

$$1{,}3a^{-3}b^2 \cdot 5a^2b^{-4} = (1{,}3 \cdot 5)\left(a^{-3} \cdot a^2\right)\left(b^2 \cdot b^{-4}\right) = 6{,}5a^{-1}b^{-2} = \frac{6{,}5}{ab^2}.$$

Ответ: $\frac{6{,}5}{ab^2}$.

5. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители. Вынесем за скобки в числителе x^{-2}, в знаменателе – x^{-4}. Получаем

$$\frac{3x^{-1} + x^{-2}}{x^{-4} + 3x^{-3}} = \frac{x^{-2}(3x + 1)}{x^{-4}(1 + 3x)} = \frac{x^{-2}}{x^{-4}} = x^2.$$

Ответ: x^2.

6. Учтем определение понятия степени с отрицательным показателем. Тогда неравенство имеет вид $3x - 2 \geq 2$, или $3x \geq 4$, откуда $x \geq \frac{4}{3}$. При этом условие $3x - 2 \neq 0$ выполняется.

Ответ: $x \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

7. Учтем свойства степеней и получим $2^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 5^{-4} = (2 \cdot 3 \cdot 5)^{-4} = 30^{-4}$. Теперь видно, что данные выражения равны.

Ответ: равны.

8. Используем понятие степени с отрицательным показателем. Получаем $\left(2^{-1} + 3^{-1}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}$.

Ответ: $\frac{36}{25}$.

9. Учтем свойства степени и получим

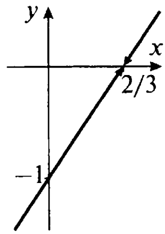
$$(0{,}25x^{-4}y^{-3})^2 \cdot \left(\frac{x^{-3}}{4y^2}\right)^{-3} = 4^{-2}x^{-8}y^{-6} \cdot 4^3x^9y^6 = 4x.$$

Ответ: $4x$.

10. Раскроем скобки, учитывая свойства степеней. Получим $a^2b^2(a^{-2} - b^{-2}) = a^0b^2 - a^2b^0 = b^2 - a^2$.

Ответ: $b^2 - a^2$.

11. Учтем определение понятия степени с отрицательным показателем. Тогда функция имеет вид $y = \frac{3x-2}{2}$, или $y = \frac{3}{2}x - 1$. Построим график этой линейной функции. Учтем, что $3x - 2 \neq 0$, или $x \neq \frac{2}{3}$. Такая точка в график не входит (показана стрелочками).



Ответ: см. график.

12. Используем определение понятия степени с отрицательным показателем. Получаем

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^{-2} + \left(2-\sqrt{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2} + \frac{1}{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{9+4\sqrt{5}} +$$

$$+\frac{1}{9-4\sqrt{5}} = \frac{9-4\sqrt{5}+9-4\sqrt{5}}{\left(9+4\sqrt{5}\right)\left(9-4\sqrt{5}\right)} = \frac{18}{9^2-\left(4\sqrt{5}\right)^2} = \frac{18}{81-80} = 18.$$

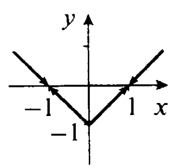
Ответ: 18.

13. Используя основное свойство дроби, умножим ее числитель и знаменатель на 3^{2n}. Получаем

$$\frac{3^{2n}+1}{3^{-2n}+1} = \frac{\left(3^{2n}+1\right)3^{2n}}{\left(3^{-2n}+1\right)3^{2n}} = \frac{\left(3^{2n}+1\right)3^{2n}}{1+3^{2n}} = 3^{2n}.$$

Ответ: 3^{2n}.

14. Используем определение понятия степени с отрицательным показателем. Функция имеет вид $y = |x| - 1$. Построим этот график, используя определение модуля. Учтем, что $|x| - 1 \neq 0$, т. е. $x \neq \pm 1$. Эти точки в график не входят (они показаны стрелочками).



Ответ: см. график.

V. Подведение итогов урока

ПОВТОРЕНИЕ

Уроки 95, 96. Повторение темы «Рациональные дроби»

Цель: повторить основные понятия и способы решения типовых задач по теме.

Планируемые результаты: закрепить изученные понятия и навыки решения задач.

Тип уроков: уроки повторения.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

Выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания и умножения, а также деления на число, не равное нулю, называют *целыми выражениями*: $2a^4 - \frac{b^3}{5}$; $(a-b)(2a^2+3b^4)$; ... .

Выражения, содержащие деление на переменные, называют *дробными выражениями*: $\frac{3a}{b^2}$; $\frac{4a-3b^2}{a-2b}$; ... .

Целые и дробные выражения называют *рациональными выражениями*.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют *допустимыми значениями переменных*. В рациональных выражениях допустимыми являются те значения переменных, при которых не равен нулю знаменатель.

Основное свойство дроби: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ (при $b \neq 0$ и $c \neq 0$), т. е. числитель и знаменатель дроби можно умножить на число, не равное нулю.

Свойства дробей

1. Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тем же, т. е.

$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$. При сложении дробей с разными знаменателями дроби приводят к общему знаменателю.

2. Чтобы умножить дроби, нужно умножить их числители и умножить их знаменатели. Первое произведение записать числителем, а второе произведение – знаменателем дроби, т. е. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

3. Чтобы возвести дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель. Первый результат записать в числителе, второй результат – в знаменателе дроби, т. е. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

4. Чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй, т. е. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

Сумму, разность, произведение и частное рациональных дробей всегда можно представить в виде рациональной дроби. Поэтому всякое рациональное выражение можно представить в виде рациональной дроби.

Обратная пропорциональность – функция вида $y=\frac{k}{x}$, где x – независимая переменная и k – число, не равное нулю.

III. Задания на уроках

№ 214 (а, в); 216 (г); 221 (а, б); 227 (в); 231 (а, г); 238 (а); 243 (а, б); 248 (а, в).

IV. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 214 (б, г); 216 (в); 221 (в, г); 227 (г); 231 (б, в); 238 (б); 243 (в, г); 248 (б, г).

Урок 97. Повторение по теме «Квадратные корни»

Цель: повторить основные понятия и способы решения типовых задач по теме.

Планируемые результаты: закрепить изученные понятия и навыки решения задач.

Тип урока: урок повторения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

Числа, которые используются для счета предметов (1, 2, 3 и т. д.) называют ***натуральными***. К целым числам относятся натуральные числа, противоположные им числа и число 0 (т. е. 0; ±1; ±2; ±3 и т. д.) ***К рациональным числам*** относят числа вида $\frac{m}{n}$ (где m – целое число и n – натуральное число), т. е. $\frac{3}{8}$; –5; $-\frac{2}{7}$ и т. д. Рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби (например: $\frac{1}{4} = 0{,}25$; $-\frac{1}{3} = -0{,}333... = 0{,}(3)$). Верно и обратное утверждение: конечную десятичную дробь или бесконечную периодическую десятичную дробь можно представить в виде рационального числа.

Иррациональные числа – бесконечные непериодические десятичные дроби: 0,12345...; $\sqrt{2}$; $5-\sqrt{3}$ и т. д. ***К действительным числам*** относят рациональные и иррациональные числа.

Модулем числа а называют само число a, если число a неотрицательное, и число $-a$, если число a отрицательное. Таким образом, $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

Арифметическим *квадратным корнем* из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число b, квадрат которого равен a. Таким образом, $\sqrt{a} = b$, если $b^2 = a$ (при этом $a \geq 0$ и $b \geq 0$).

Свойства квадратного корня

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ (для $a \geq 0$ и $b \geq 0$);
2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (для $a \geq 0$ и $b > 0$);
3. $\sqrt{a^2} = |a|$.
4. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ (для $a \geq 0$).

III. Задания на уроке

№ 476 (в); 477 (а, г); 488; 492 (а, б); 498; 503 (д); 506 (в); 510 (а).

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 476 (г); 477 (б, в); 492 (в, г); 499 (б); 503 (е); 506 (г); 510 (б).

Урок 98. Повторение по теме «Квадратные уравнения»

Цель: повторить основные понятия и способы решения типовых задач по теме.

Планируемые результаты: закрепить изученные понятия и навыки решения задач.

Тип урока: урок повторения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ (где x – неизвестное, a, b, c – некоторые числа и $a \neq 0$) называется ***квадратным***. Число a называют *первым* (или *старшим*) *коэффициентом*, b – *вторым коэффициентом*, c – *свободным членом* квадратного уравнения.

Неполным квадратным уравнением называют уравнение, в котором хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю. Для решения неполного квадратного уравнения используют разложение его левой части на множители.

Если $b = 0$, то уравнение имеет вид $ax^2 + c = 0$ (при $c \neq 0$). При $-\frac{c}{a} > 0$ уравнение имеет два различных корня: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, при $-\frac{c}{a} < 0$ уравнение корней не имеет.

Если $c = 0$, то уравнение имеет вид $ax^2 + bx = 0$ (при $b \neq 0$) и два различных корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Если $b = 0$ и $c = 0$, то уравнение имеет вид $ax^2 = 0$ и единственный корень $x = 0$.

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ решается способом выделения квадрата двучлена. Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* квадратного уравнения. Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Если $D = 0$, то уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{b}{2a}$. Если $D < 0$, то уравнение корней не имеет.

Выражение $D_1 = k^2 - ac$ называют дискриминантом квадратного уравнения $ax^2 + 2kx + c = 0$ со вторым четным коэффициентом. Если $D_1 > 0$, то уравнение имеет два различных корня: $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$. Если $D_1 = 0$, то уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{b}{a}$. Если $D_1 < 0$, уравнение корней не имеет.

Теорема Виета

Если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то их сумма $x_1 + x_2 = -p$ и произведение $x_1x_2 = q$. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то их сумма $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и произведение $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Обратная теорема Виета

Если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то числа m и n являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Уравнение, обе части которого являются рациональными выражениями, называют *рациональным*. Рациональное уравнение, в котором обе части являются целыми выражениями, называют *целым рациональным уравнением*. Рациональное уравнение, в котором хотя бы одна часть является дробным выражением, называют *дробным рациональным уравнением*.

Решение дробных рациональных уравнений

1. Находят общий знаменатель дробей, входящих в уравнение.
2. Умножают обе части уравнения на этот общий знаменатель.
3. Решают получившееся целое уравнение.
4. Исключают те его корни, при которых обращается в нуль общий знаменатель дробей.
5. Записывают ответ.

III. Задания на уроке

№ 650 (в); 652 (г); 658 (а); 661; 672 (в); 686; 690 (д); 696 (а–в); 702.

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 650 (г); 652 (е); 658 (б); 662; 672 (г); 687; 690 (е); 696 (г–е); 703.

Урок 99. Повторение по теме «Неравенства»

Цель: повторить основные понятия и способы решения типовых задач по теме.

Планируемые результаты: закрепить изученные понятия и навыки решения задач.

Тип урока: урок повторения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

Сравнение чисел. Число a больше числа b, если разность $a - b$ – положительное число. Число a меньше числа b, если разность $a - b$ – отрицательное число.

Свойства числовых неравенств

1. Если $a > b$, то $b < a$. Если $a < b$, то $b > a$.
2. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.
3. Если $a < b$ и c – любое число, то $a + c < b + c$.
4. Если $a < b$ и c – положительное число, то $ac < bc$.

Если $a < b$ и c – отрицательное число, то $ac > bc$.

Следствие: если a и b – положительные числа и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

5. Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.
6. Если $a < b$ и $c < d$ (где a, b, c, d – положительные числа), то $ac < bd$.

Следствие: если a и b – положительные числа и $a < b$, то $a^n < b^n$ (где n – натуральное число).

Свойства равносильности неравенств

1. Если из одной части неравенства перенести в другую член с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.
2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство.

Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

Линейное неравенство – неравенство вида $ax > b$ или $ax < b$ (где x – переменная, a и b – некоторые числа). Решаются такие неравенства с использованием свойств равносильности неравенств.

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

III. Задания на уроке

№ 918 (а); 923; 926 (б); 940 (а, в); 941 (а, б); 950; 955 (а, в); 957 (б); 959 (а).

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 918 (б); 924; 926 (а); 940 (б, г); 941 (в, г); 951; 955 (б, г); 957 (в); 959 (б).

Урок 100. Повторение по теме «Степень с целым показателем. Элементы статистики»

Цель: повторить основные понятия и способы решения типовых задач по теме.

Планируемые результаты: закрепить изученные понятия и навыки решения задач.

Тип урока: урок повторения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Работа по теме урока

Если $a \neq 0$ и n – целое отрицательное число, то $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$. Выражение $0^n = 0$ при натуральном n. Выражение 0^n не имеет смысла при целом отрицательном n и при $n = 0$.

Свойства степени с целым показателем

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

Для любых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любого целого n:

4) $(ab)^n = a^n b^n$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Стандартным видом числа α называют его запись в виде $a \cdot 10^n$ (где $1 \le a < 10$ и n – целое число). Число n называют порядком числа α.

III. Задания на уроке

№ 1081 (а, в); 1085 (а); 1088 (б); 1091 (а, б); 1094 (а, в); 1095; 1101.

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

№ 1081 (б, г); 1085 (б); 1088 (а); 1091 (в, г); 1094 (б, г); 1096; 1102.

Урок 101. Итоговая контрольная работа

Цель: проверить знания по всем темам курса.

Тип урока: урок контроля и оценки знаний.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Общая характеристика контрольной работы

По окончании обучения проводится итоговая контрольная работа. Предлагаются два одинаковых по сложности варианта. На наш взгляд, использование при подведении итогов вариантов разной сложности нецелесообразно и некорректно. В одинаковых условиях проще и этичнее сопоставить результаты и успехи учащихся. При окончательном подведении итогов, разумеется, необходимо учитывать все результаты обучения (оценки за контрольные работы, сложность решаемых задач, активность на уроках и т. д.).

Каждый вариант традиционно содержит 6 задач примерно одинаковой сложности. Поэтому рекомендуем использовать те же критерии при оценке, что и для вариантов 1 и 2 контрольных работ при текущем обучении. Оценка «5» ставится за пять решенных задач, оценка «4» – за четыре задачи, оценка «3» – за три задачи. Одна задача является резервной и дает некоторую свободу выбора.

III. Контрольная работа

Вариант 1

1. Упростите выражение $\left(\frac{6}{a^2-9}+\frac{1}{3-a}\right)\cdot\frac{a^2+6a+9}{5}$ и найдите его значение при $a = -4$.

2. Выполните действия: $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{24}\left(6-5\sqrt{6}\right)$.

3. При каких значениях x функция $y=\frac{3x-2}{4}-\frac{5x+1}{2}$ принимает положительные значения?

4. Сократите дробь $\frac{2a^2-2b^2-a+b}{1-2a-2b}$.

5. Поезд должен был пройти 420 км за определенное время. Однако по техническим причинам выехал на 30 мин позже. Чтобы прибыть вовремя, он увеличил скорость на 2 км/ч. Какова была скорость поезда?

6. При каких значениях a уравнение $\frac{x^2-(4a+3)x+3a^2+3a}{x-1}=0$:

а) имеет один корень;

б) имеет только отрицательные корни?

Вариант 2

1. Упростите выражение $\left(\frac{4}{a^2-4}+\frac{1}{2-a}\right)\cdot\frac{a^2+4a+4}{3}$ и найдите его значение при $a=-2{,}3$.

2. Выполните действия: $\left(4\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{54}\left(8-7\sqrt{6}\right)$.

3. При каких значениях x функция $y=\frac{2x+3}{4}-\frac{6x-5}{3}$ принимает отрицательные значения?

4. Сократите дробь $\frac{b-a-3b^2+3a^2}{3a+3b-1}$.

5. Из одного пункта в другой, расстояние между которыми 120 км, выехали велосипедист и мотоциклист. Скорость мотоциклиста на 10 км/ч больше скорости велосипедиста, поэтому он затратил на путь на 6 ч меньше. Какова скорость мотоциклиста?

6. При каких значениях a уравнение $\frac{x^2-(3a+3)x+2a^2+3a}{x-2}=0$:

а) имеет один корень;

б) имеет только отрицательные корни?

IV. Разбор задач (ответы и решения)

Целесообразно вывесить на стенде разбор задач.

Вариант 1

1. Приведем дроби в скобках к общему знаменателю и сложим их. Учтем формулу квадрата суммы чисел. Получаем

$$\left(\frac{6}{a^2-9}+\frac{1}{3-a}\right)\cdot\frac{a^2+6a+9}{5}=\left(\frac{6}{(a-3)(a+3)}-\frac{1}{a-3}\right)\cdot\frac{(a+3)^2}{5}=$$

$$=\frac{6-a-3}{(a-3)(a+3)}\cdot\frac{(a+3)^2}{5}=\frac{(3-a)(a+3)^2}{(a-3)(a+3)5}=-\frac{a+3}{5}.$$

Найдем значение этого выражения при $a=-4$ и получим $-\frac{-4+3}{5}=\frac{1}{5}=0{,}2.$

Ответ: $-\frac{a+3}{5}$; 0,2.

2. Учтем свойства квадратных корней и формулу квадрата разности чисел. Имеем

$$\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{24}\left(6-5\sqrt{6}\right)=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\cdot2\sqrt{3}\cdot3\sqrt{2}+\left(3\sqrt{2}\right)^2+$$

$$+2\sqrt{6}\left(6-5\sqrt{6}\right)=12-12\sqrt{6}+18+12\sqrt{6}-60=-30.$$

Ответ: –30.

3. Преобразуем данную функцию. Для этого приведем дроби к общему знаменателю и вычтем их. Получаем

$$y=\frac{3x-2}{4}-\frac{5x+1}{2}=\frac{3x-2-2(5x+1)}{4}=\frac{3x-2-10x-2}{4}=$$

$$=\frac{-7x-4}{4}.$$

Так как функция принимает положительные значения, то имеем неравенство $\frac{-7x-4}{4}>0$, или $-7x-4>0$, или $-4>7x$, откуда $-\frac{4}{7}>x$.

Ответ: $x<-\frac{4}{7}$.

4. Для сокращения дроби разложили ее числитель на множители, используя формулу разности квадратов и группировку членов. Тогда дробь имеет вид

$$\frac{2a^2-2b^2-a+b}{1-2a-2b}=\frac{2(a-b)(a+b)-(a-b)}{1-2a-2b}=$$

$$\frac{(a-b)(2a+2b-1)}{1-2a-2b}=-(a-b)=b-a.$$

Ответ: $b-a$.

5. Пусть x (км/ч) – реальная скорость поезда, тогда планируемая скорость $(x-2)$ (км/ч). Расстояние 420 км поезд преодо-

лел за $\frac{420}{x}$ (ч), а должен был за $\frac{420}{x-2}$ (ч). По условию задачи получаем уравнение $\frac{420}{x-2} = \frac{1}{2} + \frac{420}{x}$. Умножим все члены уравнения на $2(x-2)x$. Имеем $420 \cdot 2x = x(x-2) + 420 \cdot 2(x-2)$, или $840x = x^2 - 2x + 840x - 1680$, или $x^2 - 2x - 1680 = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 42$ и $x_2 = -40$ (не подходит). Итак, реальная скорость поезда 42 км/ч.

Ответ: 42 км/ч.

6. Сначала решим уравнение $\frac{x^2 - (4a+3)x + 3a^2 + 3a}{x-1} = 0$. Дробь равна нулю, если ее числитель $x^2 - (4a+3)x + 3a^2 + 3a = 0$, а знаменатель $x - 1 \neq 0$. Решим квадратное уравнение. Найдем его дискриминант: $D = (4a+3)^2 - 4(3a^2 + 3a) = 16a^2 + 24a + 9 - 12a^2 - 12a = 4a^2 + 12a + 9 = (2a+3)^2$. Тогда корни уравнения $x_{1,2} = \frac{4a + 3 \pm (2a+3)}{2}$, т. е. $x_1 = a$ и $x_2 = 3a + 3$.

а) Если данное уравнение имеет один корень, то другой корень равен запрещенному значению $x = 1$. Поэтому или $a = 1$, или $3a + 3 = 1$ (т. е. $a = -\frac{2}{3}$). Итак, при $a = 1$ и $a = -\frac{2}{3}$ данное уравнение имеет один корень.

б) Если уравнение имеет отрицательные корни, то выполнены неравенства $\begin{cases} a < 0, \\ 3a + 3 < 0. \end{cases}$ Решение этой системы неравенств $a < -1$.

Ответ: а) $a = 1$ и $a = -\frac{2}{3}$; б) $a < -1$.

Вариант 2

1. Приведем дроби в скобках к общему знаменателю и сложим их. Учтем формулу квадрата суммы чисел. Получаем

$$\left(\frac{4}{a^2-4} + \frac{1}{2-a}\right) \cdot \frac{a^2+4a+4}{3} = \left(\frac{4}{(a-2)(a+2)} - \frac{1}{a-2}\right) \cdot \frac{(a+2)^2}{3} =$$

$$= \frac{4-a-2}{(a-2)(a+2)} \cdot \frac{(a+2)^2}{3} = \frac{(2-a)(a+2)^2}{(a-2)(a+2)3} = -\frac{a+2}{3}.$$

Найдем значение этого выражения при $a = -2{,}3$ и получим $-\frac{-2{,}3+2}{3} = \frac{0{,}3}{3} = 0{,}1$.

Ответ: $-\dfrac{a+2}{3}$; 0,1.

2. Учтем свойства квадратных корней и формулу квадрата разности чисел. Имеем

$$\left(4\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{54}\left(8-7\sqrt{6}\right)=\left(4\sqrt{3}\right)^2-2\cdot 4\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}+\left(3\sqrt{2}\right)^2+$$
$$+3\sqrt{6}\left(8-7\sqrt{6}\right)=48-24\sqrt{6}+18+24\sqrt{6}-126=-60.$$

Ответ: –60.

3. Преобразуем данную функцию. Для этого приведем дроби к общему знаменателю и вычтем их. Получаем

$$y=\frac{2x+3}{4}-\frac{6x-5}{3}=\frac{3(2x+3)-4(6x-5)}{12}=\frac{6x+9-24x+20}{12}=$$
$$=\frac{-18x+29}{12}.$$

Так как функция принимает положительные значения, то имеем неравенство $\dfrac{-18x+29}{12}<0$, или $-18x+29<0$, или $29<18x$, откуда $\dfrac{29}{18}<x$.

Ответ: $x>\dfrac{29}{18}$.

4. Для сокращения дроби разложили ее числитель на множители, используя формулу разности квадратов и группировку членов. Тогда дробь имеет вид

$$\frac{b-a-3b^2+3a^2}{3a+3b-1}=\frac{(b-a)-3(b-a)(b+a)}{3a+3b-1}=$$
$$=\frac{(b-a)(1-3b-3a)}{3a+3b-1}=-(b-a)=a-b.$$

Ответ: $a-b$.

5. Пусть x (км/ч) – скорость мотоциклиста, тогда скорость велосипедиста $(x-10)$ (км/ч). Расстояние 120 км мотоциклист преодолеет за время $\dfrac{120}{x}$ (ч), велосипедист – за время $\dfrac{120}{x-10}$ (ч).

По условию задачи получаем уравнение $\dfrac{120}{x-10}=\dfrac{120}{x}+6$. Умножим все члены уравнения на $\dfrac{1}{6}(x-10)x$. Имеем $20x=20(x-10)+$ $+(x-10)x$, или $20x=20x-200+x^2-10x$, или $x^2-10x-200=0$.

Корни этого уравнения $x_1 = 20$ и $x_2 = -10$ (не подходит). Итак, реальная скорость мотоциклиста 20 км/ч.

Ответ: 20 км/ч.

6. Сначала решим уравнение $\frac{x^2-(3a+3)x+2a^2+3a}{x-2}=0.$

Дробь равна нулю, если ее числитель $x^2 - (3a + 3)x + 2a^2 + 3a = 0$, а знаменатель $x - 2 \neq 0$. Решим квадратное уравнение. Найдем его дискриминант: $D = (3a + 3)^2 - 4(2a^2 + 3a) = 9a^2 + 18a + 9 - 8a^2 - 12a = a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2$. Тогда корни уравнения $x_{1,2}=\frac{3a+3\pm(a+3)}{2}$, т. е. $x_1 = a$ и $x_2 = 2a + 3$.

а) Если данное уравнение имеет один корень, то другой корень равен запрещенному значению $x = 2$. Поэтому или $a = 2$, или $2a + 3 = 2$ (т. е. $a=-\frac{1}{2}$). Итак, при $a = 2$ и $a=-\frac{1}{2}$ данное уравнение имеет один корень.

б) Если уравнение имеет положительные корни, то выполнены неравенства $\begin{cases} a>0, \\ 2a+3>0. \end{cases}$ Решение этой системы неравенств $a > 0$.

Ответ: а) $a = 2$ и $a=-\frac{1}{2}$; б) $a > 0$.

V. Подведение итогов урока

Урок 102. Подведение итогов обучения

Цель: ознакомить с результатами обучения и программой на следующий учебный год.

Планируемые результаты: подвести итоги учебного года.

Тип урока: продуктивный урок.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Подведение итогов контрольной работы

1. Оглашение оценок за контрольную работу.
2. Основные ошибки в задачах.
3. Разбор задач контрольной (вывешен на стенде).

III. Итоги учебного года

1. **Сообщение годовых оценок по алгебре** (похвалить отлично и хорошо успевающих школьников, обратить внимание менее

успевающих на пробелы в их знаниях и дать рекомендации по их восполнению).

2. **Особенности прошедшего учебного года** (отметить темы, усвоенные хорошо, и темы, вызвавшие трудности; обратить внимание на необходимость дальнейшего развития навыков построения графиков функций, решения уравнений и неравенств).

IV. Планы на следующий учебный год

1. Развитие тем, изученных в 7, 8 классах (построение графика квадратичной функции, решение нелинейных уравнений и неравенств, систем уравнений, обобщение понятия степени числа и т. д.).

2. Изучение новых тем (арифметическая и геометрическая прогрессии, тригонометрические функции и преобразования тригонометрических выражений).

3. Подготовка к экзамену по алгебре.

V. Поздравления с окончанием учебного года и началом каникул, пожелания на следующий учебный год

Список литературы

1. *Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др.* Алгебра: Учебник для 8 класса. М.: Просвещение, 2010.

2. *Балк М.Б., Балк Г.Д.* Математика после уроков: особие для учителей. М.: Просвещение, 1971.

3. *Белов А.С., Комаров А.А., Рурукин А.Н.* Решение задач по математике: Алгебра и геометрия (для учащихся 8 класса). М.: МИФИ, 2009.

4. *Бурмистрова Т.А.* Тематическое планирование по математике для 5–9 классов: книга для учителя. М.: Просвещение, 2003.

5. *Гусев В.А., Мордкович А.Г.* Математика: справочные материалы. М.: Просвещение, 1988.

6. *Жохов В.И., Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г.* Дидактические материалы по алгебре для 8 класса. М.: Просвещение, 2014.

7. *Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я., Козулин Б.В.* Контрольные и проверочные работы по алгебре. 8 класс. М.: Дрофа, 2001.

8. *Игнатьев Е.И.* В царстве смекалки. М.: Наука, 1982.

9. Контрольно-измерительные материалы. Алгебра. 8 класс / Сост. В.В. Черноруцкий. М.: ВАКО, 2015.

10. *Кострикина Н.П.* Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7–9 классов: книга для учителя. М.: Просвещение, 1991.

11. *Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и др.* Алгебра: Сборник заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 классе. М.: Просвещение, 2007.

12. *Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. и др.* Алгебра: Учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2014.

13. *Миндюк Н.Г., Шлыкова И.С.* Алгебра. Рабочая тетрадь. 8 класс (к учебнику Ю.Н. Макарычева). М.: Просвещение, 2014.

14. *Мочалов В.В., Сильвестров В.В.* Уравнения и неравенства с параметрами. Чебоксары: Чувашский университет, 2000.

15. *Перельман Я.И.* Живая математика. М.: Наука, 1978.

16. Рабочая программа по алгебре. 8 класс / Сост. Г.И. Маслакова. М.: ВАКО, 2014.

17. *Рурукин А.Н.* Математика: Пособие для интенсивной подготовки к экзаменам по математике. М.: ВАКО, 2004.

18. *Цыпкин А.Г., Пинский А.И.* Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. М.: Наука, 1983.

19. *Шуба М.Ю.* Занимательные задания в обучении математике: книга для учителя. М.: Просвещение, 1994.

Содержание

§ 5. Арифметический квадратный корень

§ 6. Свойства арифметического квадратного корня

§ 7. Применение свойств арифметического квадратного корня

ГЛАВА III. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 8. Квадратное уравнение и его корни

§ 9. Дробные рациональные уравнения

ГЛАВА IV. НЕРАВЕНСТВА

ГЛАВА V. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

ПОВТОРЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

Рурукин Александр Николаевич

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО АЛГЕБРЕ

к учебнику Ю.Н. Макарычева и др.
(*М.: Просвещение*)

8 класс

Выпускающий редактор *Наталья Муравьёва*
Дизайн обложки *Юлии Морозовой*
Вёрстка *Дмитрия Сахарова*

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»

Подписано в печать 26.08.2016.
Формат 84×108/32. Печать офсетная. Гарнитура Newton.
Усл. печ. листов 19,32. Тираж 5000 экз. Заказ №0871.

Отпечатано в полном соответствии с предоставленными материалами
в типографии ООО «Чеховский печатник».
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1.
Тел.: +7-915-222-15-42, +7-926-063-81-80.